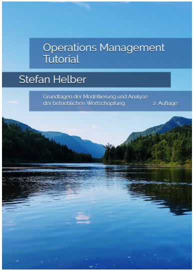
Bestandsmanagement II: Lagerhaltung bei mehrfachen Beschaffungsvorgängen

Problemaspekte, Lagerhaltungspolitiken und Risikozeiträume

Prof. Dr. Stefan Helber



Einfache vs. mehrfache Beschaffungsvorgänge

Bisher betrachtet: das Zeitungsjungenproblem

- eine Periode
- einmalige Beschaffung
- einmalige Nachfragerealisation
- einmalige Fehl- oder Restmenge
- ggf. isolierte Betrachtung mehrerer Perioden

Nun: Beschaffungen im Zeitablauf

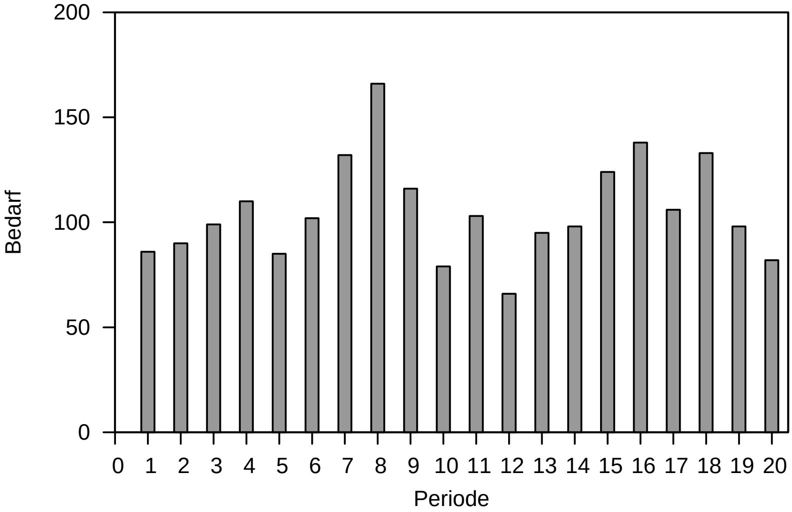
- mehrere Perioden / stetige Zeit
- Verknüpfung der Perioden durch Lagerbestände
- mehrfache Beschaffungen
- mehrfache Nachfragerealisationen
- mehrfache Fehl- oder Restmengen

Lagerhaltungspolitiken

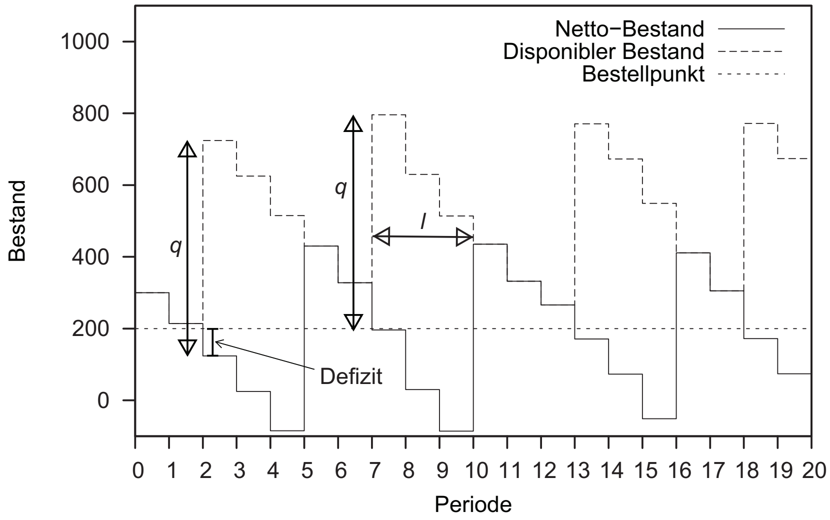
Regeln zum Bestellen / Beschaffen

- Wann Bestand ermitteln?
- Wann bestellen?
- Wieviel bestellen?
- IT-Systeme
- (s, q)-Politik und (r, S)-Politik
- Risikozeitraum

Bedarfsverlauf



(s, q)-Politik



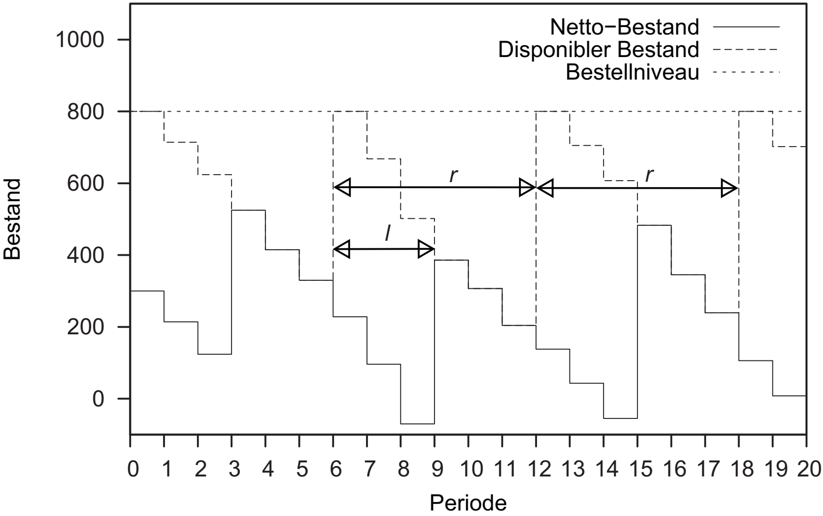
Netto−Bestand
Disponibler Bestand
Bestellpunkt
1000
800
600
400
200
0
Bestand
q
q
l
Defizit
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Periode

(s, q)-Politik

Merkmale und Funktionsweise

- Netto-Bestand: physischer Bestand minus Fehlbestand
- disponibler Bestand: Netto-Bestand plus ausstehende Lieferungen
- Lieferzeit l
- Bestellpunkt s
- Bestellmenge q
- Risikozeitraum gleich Lieferzeit: $z^{(s,q)} = l$
- Defizit!

(r, S)-Politik



Netto−Bestand
Disponibler Bestand
Bestellniveau
1000
800
600
400
200
0
Bestand
r
r
l
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Periode

(r, S)-Politik

Merkmale und Funktionsweise

- Netto-Bestand: physischer Bestand minus Fehlbestand
- disponibler Bestand: Netto-Bestand plus ausstehende Lieferungen
- Lieferzeit l
- Überwachungs- und Bestellabstand r
- Bestellniveau S
- Risikozeitraum gleich Bestellabstand plus Lieferzeit: $z^{(r,S)} = r + l$
- kein Defizit!

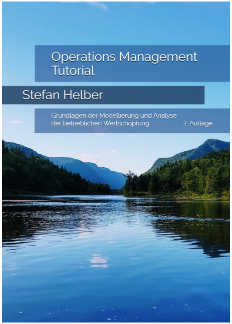
Lagerhaltungspolitiken

Fragen

- Wahl der Politik?
- Parametrisierung?
- Interdependenz der Parameter?
- ....

Nachlesen und Weiterarbeiten

- "Operations Management Tutorial" von Stefan Helber bei `amazon.de`

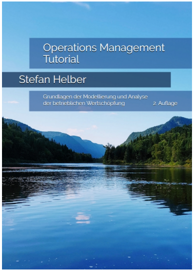


- Modell-Dateien etc. auf `operations-management-online.de`

Bestandsmanagement II: Lagerhaltung bei mehrfachen Beschaffungsvorgängen

Ausgangspunkt: Klassisches Bestellmengenmodell

Prof. Dr. Stefan Helber



Parametrisierung einer (s, q)- oder (r, S)-Politik?

Idee

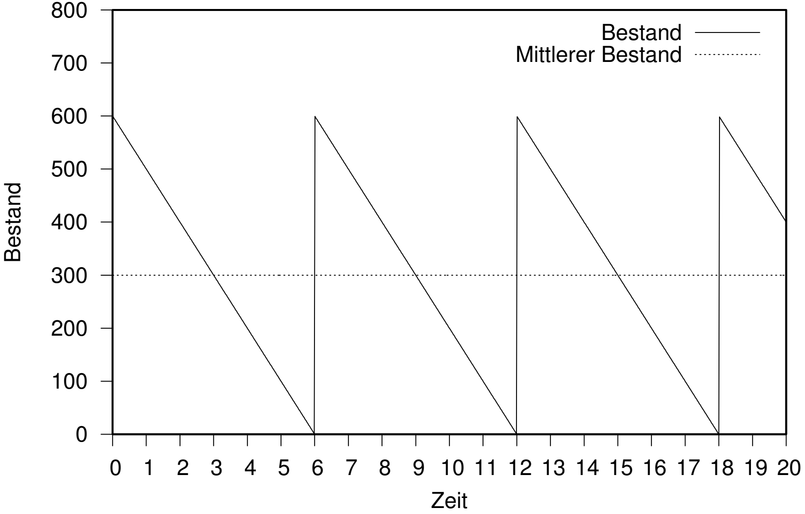
- zunächst von Unsicherheit abstrahieren
- optimale Bestellmengen oder -abstände bestimmen
- dann mit Blick auf Unsicherheit Bestellpunkt s oder -niveau S ermitteln
- damit implizit Sicherheitsbestand SB einplanen
- Heuristik

Optimale Bestellmengen und -abstände?

Ausgangpunkt: klassisches Bestellmengenmodell

- deterministische Problemstellung
- konstante Bedarfsrate $\tilde{d}$, stetiger Bedarf
- Bestellkostensatz s
- Lagerhaltungskostensatz h
- unendlich schneller Lagerzugang
- Frage nach optimaler Bestellmenge q^* bzw. -abstand t^*

Bestandsverlauf



Bestell- und Lagerkosten

Kosten je Zeiteinheit

- Lagerkosten

$$K^L(q) = h \cdot \frac{q}{2}$$

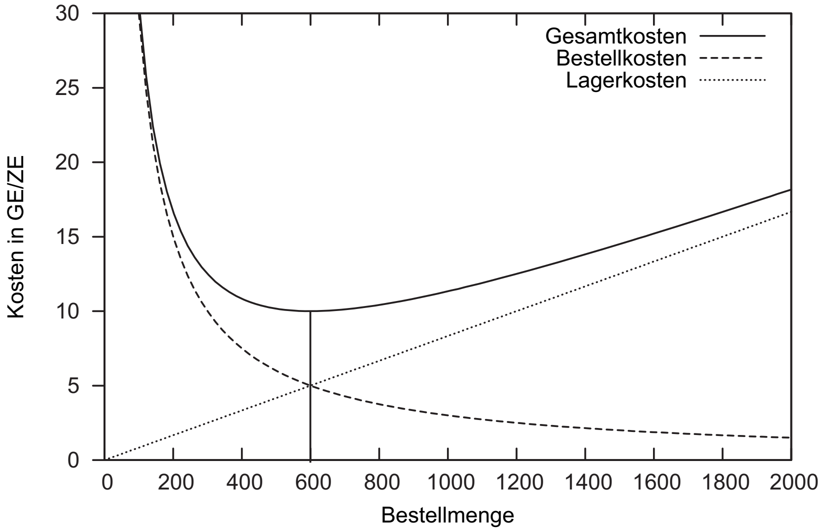
- Bestellkosten

$$K^B(q) = s \cdot \frac{\tilde{d}}{q}$$

- Gesamtkosten

$$K(q) = K^B(q) + K^L(q) = s \cdot \frac{\tilde{d}}{q} + h \cdot \frac{q}{2}$$

Kostenverlauf



Ermittlung des Kostenminimums I

$$K(q) = K^B(q) + K^L(q) = s \cdot \frac{\tilde{d}}{q} + h \cdot \frac{q}{2}$$

$$K(q)' = \frac{d\,K(q)}{d\,q} = -s\frac{\tilde{d}}{q^2} + \frac{h}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \qquad q^* = \sqrt{\frac{2s\tilde{d}}{h}}$$

$$q^* = \tilde{d} \cdot t^*$$

$$t^* = \frac{q^*}{\tilde{d}} = \frac{\sqrt{\frac{2s\tilde{d}}{h}}}{\tilde{d}} = \sqrt{\frac{2s}{\tilde{d}h}}$$

Ermittlung des Kostenminimums II

$$K(q^*) = s \cdot \frac{\tilde{d}}{q^*} + h \cdot \frac{q^*}{2}$$

$$= s \cdot \frac{\tilde{d}}{\sqrt{\frac{2sd}{h}}} + h \cdot \frac{\sqrt{\frac{2s\tilde{d}}{h}}}{2} = \sqrt{2 \cdot s \cdot \tilde{d} \cdot h}$$

$$K(q)“ = \frac{d^2\,K(q)}{d\,q^2} = 2s\frac{\tilde{d}}{q^3} > 0$$

Beispiel zum klassischen Bestellmengenmodell (Teil I)

Daten und Problemstellung

- 360 Tage pro Jahr
- Nachfrage $\tilde{d} = 36.000$ ME p. a.
- Bestellkostensatz $s = 30$ GE
- Lagerkostensatz $h = 6$ GE je ME und Jahr
- gesucht: q^*, t^* und $K(q^*)$

Beispiel zum klassischen Bestellmengenmodell (Teil II)

Optimale Bestellmenge

$$q^* = \sqrt{\frac{2s\tilde{d}}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \text{ GE } \cdot 36.000 \text{ ME / Jahr}}{6 \text{ GE /(ME Jahr)}}} = 600 \text{ ME}$$

Länge des Bestellzyklus

$$t^* = \sqrt{\frac{2s}{\tilde{d}h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \text{ GE}}{36.000 \text{ ME / Jahr} \cdot 6 \text{ GE/(ME Jahr)}}}$$

$$= \frac{1}{60} \text{ Jahr} = 6 \text{ Tage}$$

Kosten

$$K(q^*) = \sqrt{2 \cdot s \cdot \tilde{d} \cdot h}$$

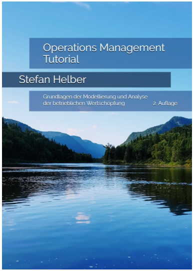
$$= \sqrt{2 \cdot 30 \text{ GE } \cdot 36.000 \text{ ME / Jahr } \cdot 6 \text{ GE /(ME Jahr)}}$$

$$= 3.600 \text{ GE / Jahr } = 10 \text{ GE / Tag}$$

Bestandsmanagement II: Lagerhaltung bei mehrfachen Beschaffungsvorgängen

Ermittlung des Bestellpunktes bei gegebener Bestellmenge

Prof. Dr. Stefan Helber

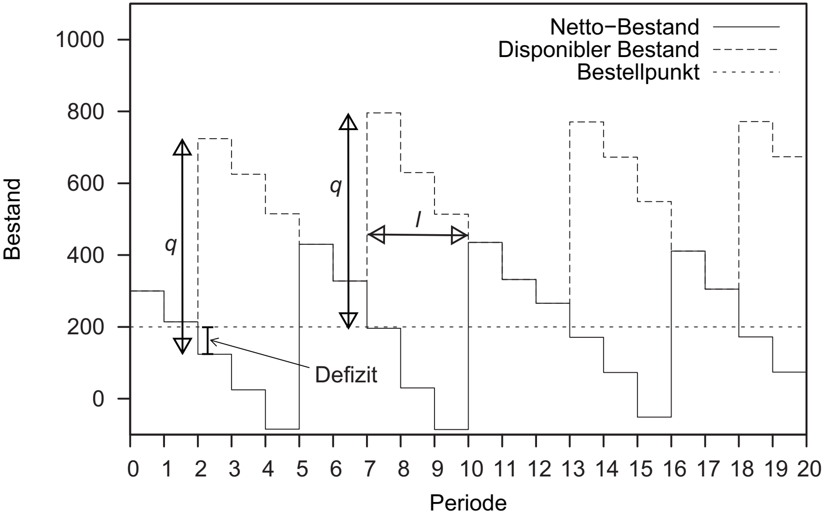


Parametrisierung einer (s, q)-Politik

Situation

- Bestellmenge q bereits über das klassische Bestellmengenmodell ermittelt
- nun mit Blick auf Unsicherheit Bestellpunkt s ermitteln
- damit implizit Sicherheitsbestand SB einplanen
- β-Servicegrad-Restriktion
- Risikozeitraum gleich Lieferzeit von l Perioden

(s, q)-Politik



Netto−Bestand
Disponibler Bestand
Bestellpunkt
1000
800
600
400
200
0
Bestand
q
q
l
Defizit
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Periode

(s, q)-Politik

Merkmale und Funktionsweise

- Netto-Bestand: physischer Bestand minus Fehlbestand
- disponibler Bestand: physischer Bestand plus ausstehende Lieferungen
- Lieferzeit l
- Bestellpunkt s
- Bestellmenge q
- Risikozeitraum gleich Lieferzeit: $z^{(s,q)} = l$
- Defizit!

Entscheidungsmodell

Modell Bestellpunkt

$$\begin{aligned}&\text{Minimiere } s\\&\text{u.B.d.R.}\\&\mathrm{E}[F(s)] \leq (1-\beta)q\end{aligned}$$

Nachfrage

- pro Periode D normalverteilt mit μ_D und σ_D
- im Risikozeitraum Y normalverteilt mit $\mu_Y = l \cdot \mu_D$ und $\sigma_Y = \sqrt{l} \cdot \sigma_D$

Bei welchem Bestellpunkt s wird die Restriktion $\mathrm{E}[F(s)] \leq (1-\beta)q$ noch eingehalten?

Analyse

Transformationsbeziehung

$$Y = \sigma_Y \cdot X + \mu_Y$$

Bestellpunkt s und normalisierter Bestellpunkt v

$$s = \sigma_Y \cdot v + \mu_Y$$

Fehlmengenerwartungswert

$$\mathrm{E}[F(s)] = \sigma_Y \Phi^1(v) = \sigma_Y \Phi^1\left(\frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

Sicherheitsbestand

$$SB = s - \mu_Y = (\mu_Y + \sigma_Y \cdot v) - \mu_Y = \sigma_Y \cdot v$$

Beispiel zum Rechengang (Teil I)

Daten und Problemstellung

- tägliche Nachfrage normalverteilt mit Erwartungswert $\mu_D = 100$ ME und Standardabweichung $\sigma_D = 30$ ME
- Bestellmenge $q = 600$ ME bereits festgelegt
- Länge der Wiederbeschaffungszeit $l = 3$ Tage
- β-Servicegrad soll 98% betragen
- gesucht: Bestellpunkt s, Sicherheitsbestand SB?

Beispiel zum Rechengang (Teil II)

Nachfrage im Risikozeitraum

$$\mu_Y = l \cdot \mu_D = 3 \cdot 100 \text{ ME} \; = 300 \text{ ME}$$
$$\sigma_Y^2 = l \cdot \sigma_D^2 = 3 \cdot 30^2 \text{ ME}^2 = 2700 \text{ ME}^2$$

Zulässige erwartete Fehlmenge zu einem β-Servicegrad von 98%

$$\mathrm{E}[F(s)] = (1-\beta) \cdot q = (1-0{,}98) \cdot 600 \text{ ME} = 0{,}02 \cdot 600 \text{ ME} = 12 \text{ ME}.$$

Aus

$$\mathrm{E}[F(s)] = \sigma_Y \cdot \Phi^1\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = \sigma_Y \cdot \Phi^1(v),$$

erhalten wir

$$\Phi^1(v) = \frac{\mathrm{E}[F(s)]}{\sigma_Y} = \frac{12}{\sqrt{2700}} = 0{,}23$$

Laut Tabelle für die Verlustfunktion erster Ordnung gilt

$$\Phi^1(v = 0{,}41) \approx 0{,}227011$$

Beispiel zum Rechengang (Teil III)

Aus der Beziehung

$$v = \frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

finden wir

$$s = \sigma_Y v + \mu_Y \approx 0{,}41 \cdot \sqrt{2700}\ \text{ME} + 300\ \text{ME} = 321{,}30\ \text{ME}$$

aufgerundet 322 ME, dabei Sicherheitsbestand

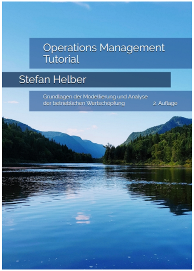
$$SB = s - \mu_Y = 321{,}30\ \text{ME} - 300\ \text{ME} = 21{,}30\ \text{ME}$$

bzw. aufgerundet 22 ME

Bestandsmanagement II: Lagerhaltung bei mehrfachen Beschaffungsvorgängen

Ermittlung des Bestellniveaus bei gegebenem Bestellabstand

Prof. Dr. Stefan Helber

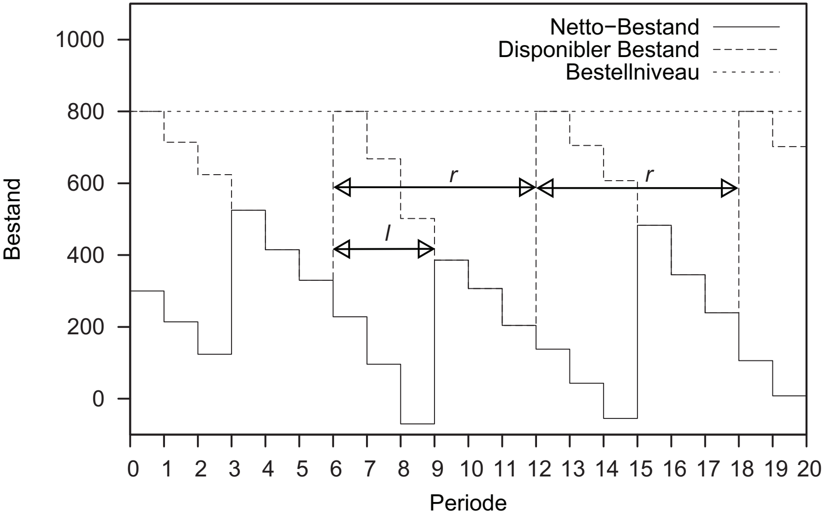


Parametrisierung einer (r, S)-Politik

Situation

- Bestellabstand $r = t^* = \frac{q^*}{\tilde{d}} = \frac{\sqrt{\frac{2s\tilde{d}}{h}}}{\tilde{d}} = \sqrt{\frac{2s}{\tilde{d}h}}$ bereits ermittelt
- nun mit Blick auf Unsicherheit Bestellniveau S ermitteln
- damit <u>implizit</u> Sicherheitsbestand SB einplanen
- β-Servicegrad-Restriktion
- Risikozeitraum gleich Bestellabstand plus Lieferzeit, also $r + l$ Perioden

(r, S)-Politik



Netto−Bestand
Disponibler Bestand
Bestellniveau
1000
800
600
400
200
0
Bestand
r
r
l
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Periode

(r, S)-Politik

Merkmale und Funktionsweise

- Netto-Bestand: physischer Bestand minus Fehlbestand
- disponibler Bestand: physischer Bestand plus ausstehende Lieferungen
- Lieferzeit l
- Überwachungs- und Bestellabstand r
- Bestellniveau S
- Risikozeitraum gleich Bestellabstand plus Lieferzeit: $z^{(r,S)} = r + l$
- kein Defizit!

Entscheidungsmodell

Modell Bestellniveau

$$\begin{aligned}&\text{Minimiere } S\\&\text{u.B.d.R.}\\&E[F(S)] \leq (1-\beta)\cdot\tilde{d}\cdot r\end{aligned}$$

Nachfrage

- pro Periode D normalverteilt mit μ_D und σ_D
- im Risikozeitraum Z normalverteilt mit $\mu_Z = (r+l)\cdot\mu_D$ und $\sigma_Z = \sqrt{r+l}\cdot\sigma_D$

Bei welchem Bestellniveau S wird die Restriktion $E[F(S)] \leq (1-\beta)\cdot\tilde{d}\cdot r$ noch eingehalten?

Analyse

Transformationsbeziehung

$$Z = \sigma_Z \cdot X + \mu_Z$$

Bestellniveau S und normalisiertes Bestellniveau v

$$S = \sigma_Z \cdot v + \mu_Z$$

Fehlmengenerwartungswert

$$\mathrm{E}[F(S)] = \sigma_Z \Phi^1(v) = \sigma_Z \Phi^1\left(\frac{S - \mu_Z}{\sigma_Z}\right)$$

Sicherheitsbestand

$$SB = S - \mu_Z = (\mu_Z + \sigma_Z \cdot v) - \mu_Z = \sigma_Z \cdot v$$

Beispiel zum Rechengang (Teil I)

Daten und Problemstellung

- tägliche Nachfrage normalverteilt mit Erwartungswert $\mu_D = 100$ ME und Standardabweichung $\sigma_D = 30$ ME
- Nachfragerate $\tilde{d} = 100$ ME/Tag
- Überwachungs- und Bestellabstand $r = 6$ Tage bereits festgelegt
- Länge der Wiederbeschaffungszeit $l = 3$ Tage
- β-Servicegrad soll 98% betragen
- gesucht: Bestellniveau S, Sicherheitsbestand SB?

Beispiel zum Rechengang (Teil II)

Nachfrage im Risikozeitraum

$$\mu_Z = (r + l) \cdot \mu_D = 9 \cdot 100 \text{ ME} = 900 \text{ ME}$$
$$\sigma_Z^2 = (r + l) \cdot \sigma_D^2 = 9 \cdot 30^2 \text{ ME}^2 = 8100 \text{ ME}^2$$

Zulässige erwartete Fehlmenge zu einem β-Servicegrad von 98%

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[F(S)] &= (1 - \beta) \cdot \tilde{d} \cdot r = (1 - 0{,}98) \cdot 100 \text{ ME/Tag} \cdot 6 \text{ Tage} \\ &= 0{,}02 \cdot 600 \text{ ME} = 12 \text{ ME}. \end{aligned}$$

Aus

$$\mathrm{E}[F(S)] = \sigma_Z \cdot \Phi^1\left(\frac{S - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \sigma_Z \cdot \Phi^1(v),$$

erhalten wir

$$\Phi^1(v) = \frac{\mathrm{E}[F(S)]}{\sigma_Z} = \frac{12}{90} = 0{,}133$$

Laut Tabelle für die Verlustfunktion erster Ordnung gilt

$$\Phi^1(v = 0{,}75) \approx 0{,}131167$$

Beispiel zum Rechengang (Teil III)

Aus der Beziehung

$$v = \frac{S - \mu_Z}{\sigma_Z}$$

finden wir

$$S = \sigma_Z \cdot v + \mu_Z = 90 \cdot 0{,}75 \text{ ME} + 900 \text{ ME} = 967{,}5 \text{ ME}$$

aufgerundet 968 ME, dabei Sicherheitsbestand

$$SB = S - \mu_Z = 967{,}5 \text{ ME} - 900 \text{ ME} = 67{,}5 \text{ ME}$$

bzw. aufgerundet 68 ME.

Zum Vergleich: Sicherheitsbestand der (s, q)-Politik nur 22 ME, dort aber Defizit!