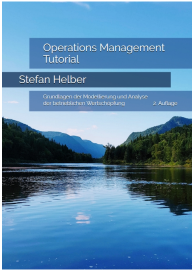
Annahme von Aufträgen und Buchungen

Problemaspekte

Prof. Dr. Stefan Helber



Problemaspekte

Dienstleistungen

- Vereinbarung zwischen Erbringer und Kunden
- vielfach nicht lagerfähig
- ggf. Mitwirkung / Anwesenheit des Kunden
- Zeitpunkt / Zeitraum der Leistungserstellung zentral

Wichtige Problemaspekte

- Anzahl gleichzeitig bedienter Kunden
- Komplexität des Leistungsprozesses

Eine Klassifikation

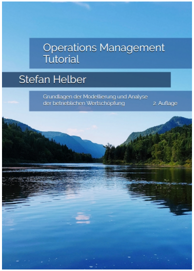
Leistungsprozess		niedrig	hoch
	komplex	Triebwerks-instandhalter	Krankenhaus
	einfach	House-Sitter	Hotel

Anzahl paralleler Kunden

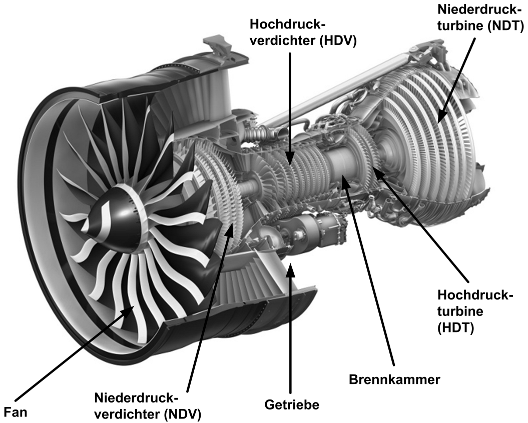
Annahme von Aufträgen und Buchungen

Auftragsannahme für komplexe Prozesse: Triebwerksinstandhaltung

Prof. Dr. Stefan Helber

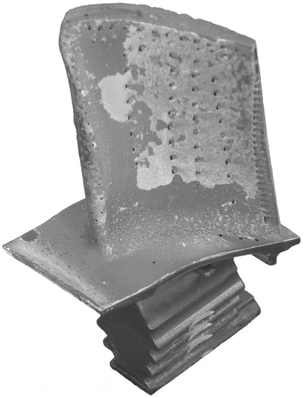


Triebwerk eines Verkehrsflugzeugs



Quelle: General Electric

Hochdruckturbinenschaufel



Instandhaltungsprozess

Prozessschritte

1. Demontage und Befundung
2. Instandsetzung oder Austausch von Komponenten
3. Montage
4. Funktionsnachweis des Gesamttriebwerks

Komplexe Dienstleistungsprozesse

Beispiel der Triebwerksinstandhaltung („Regeneration“)

- wirtschaftlich wichtig
- technisch anspruchsvoll
- organisatorisch komplex
- spezialisierte Dienstleister

Ähnliche Problemstrukturen in anderen Bereichen

Auftragsannahmeentscheidung

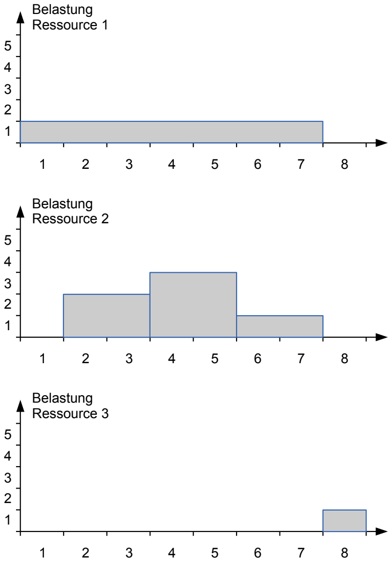
Problemaspekte

- Auftragsbestand
- längerer Prozess
- mehrere Ressourcen
- Triebwerk muss verfügbar sein
- Terminabstimmung mit dem Kunden

Kritische Ressourcen

1. (De-)Montagestraße
2. Komponentenüberholung
3. Prüfstand

Belastung durch einen Auftrag



Entscheidungsmodell zur Auftragsannahme

Modellkomponenten

- mehrere Ressourcen
- mehrere Perioden
- mehrere Aufträge, z. T. bereits angenommen
- mögliche Startzeitpunkte
- Deckungsbeiträge der Aufträge
- Entscheidung: „Ob“ und „Wann“ der Auftragsdurchführung

Symbol	Bedeutung
	Indizes und Indexmengen
$i \in \mathcal{I}$	Aufträge, $\mathcal{I} = \{1, ..., I\}$
$\overline{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}$	Teilmenge der angenommenen und zeitlich fixierten Aufträge
$j \in \mathcal{J}$	Ressourcen, $\mathcal{J} = \{1, ..., J\}$
$t \in \mathcal{T}$	Perioden, $\mathcal{T} = \{1, ..., T\}$
$\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}$	mögliche Startzeitpunkte von Auftrag i
	Parameter
$a_{ij\tau}$	Ressourcenverbrauch von Auftrag i auf Ressource j in der τ-ten Periode der Bearbeitung
d_i	Bearbeitungsdauer (in Perioden) von Auftrag i
c_{jt}	Kapazität von Ressource j in Periode t
u_i	Deckungsbeitrag von Auftrag i
$\overline{x}_{it} \in \{0, 1\}$	1, wenn Auftrag i bereits zum Start in Periode t angenommen wurde, 0 sonst
	Entscheidungsvariablen
$X_{it} \in \{0, 1\}$	1, wenn Auftrag i zum Start in Periode t angenommen wird oder wurde, 0 sonst

Modell Auftragsannahme II

$$\text{Maximiere } Z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{T} u_i \cdot X_{it} \tag{1}$$

u. B. d. R.

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{\tau=1}^{d_i} a_{ij\tau} \cdot X_{i,t-\tau+1} \leq c_{jt}, \qquad j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \tag{2}$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}_i} X_{it} \leq 1, \qquad i \in \mathcal{I} \tag{3}$$

$$X_{it} = 0, \qquad i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_i \tag{4}$$

$$X_{it} = \overline{x}_{it}, \qquad i \in \overline{\mathcal{I}}, t \in \mathcal{T}_i \tag{5}$$

Beispiel

Daten der Ressourcen der Triebwerksinstandhaltung

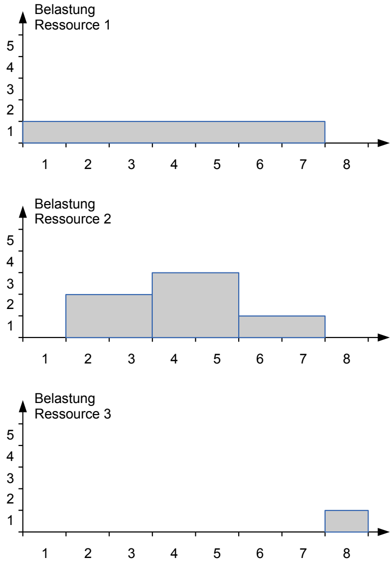
Ressource	Bezeichnung	Kapazität je Periode [KE]
1	(De-)Montagestraße	3
2	Komponentenüberholung	8
3	Prüfstand	1

Drei Aufträge für Perioden 1 bis 16

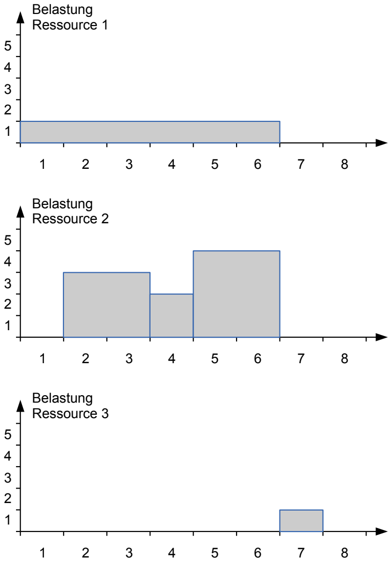
- Auftrag 1 bereits angenommen, Start in Periode 1, DB 5.000 GE
- Auftrag 2 angefragt zum Start in Periode 3 oder 4, DB 4.000 GE
- Auftrag 3 angefragt zum Start in Periode 2, DB 2.000 GE

Welche Aufträge annehmen und wann starten?

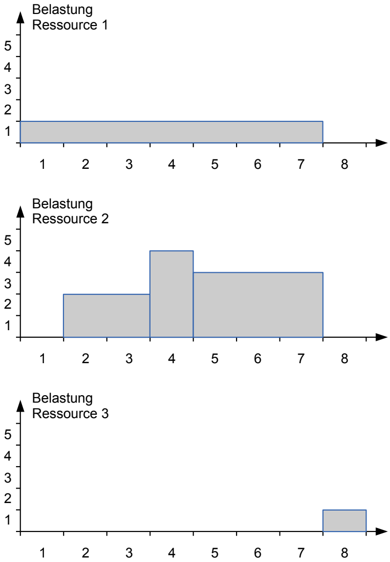
Belastung durch Auftrag 1



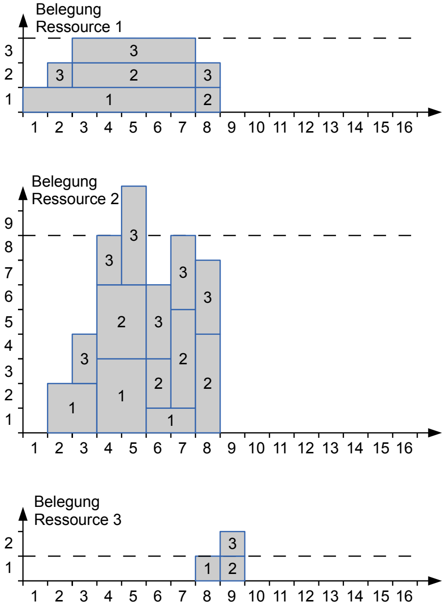
Belastung durch Auftrag 2



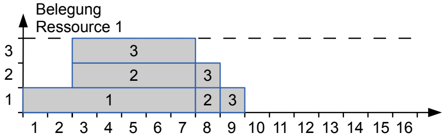
Belastung durch Auftrag 3

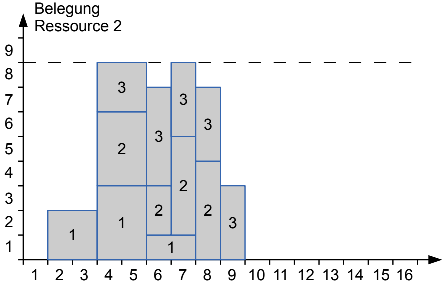


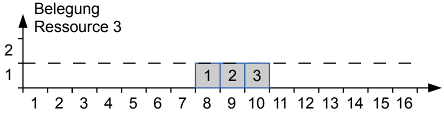
Fall 1: Aufträge 2 und 3 annehmen



Fall 2: Aufträge 2 annehmen, Auftrag 3 verschieben



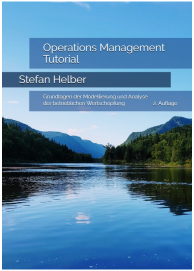




Annahme von Aufträgen und Buchungen

Kapazitätssteuerung I: Wirkungsweise eines Schutzlimits

Prof. Dr. Stefan Helber



Beispiel: Buchungsannahme für Hotels

Kundengruppen

- Geschäftsreisende
- Touristen

Leistungs- und Vermarktungsprozess

- Integration eines externen Faktors
- eingeschränkte operative Flexibilität
- heterogenes Nachfragerverhalten
- standardisiertes Leistungsprogramm

Grundmodell einer Kapazitätssteuerung

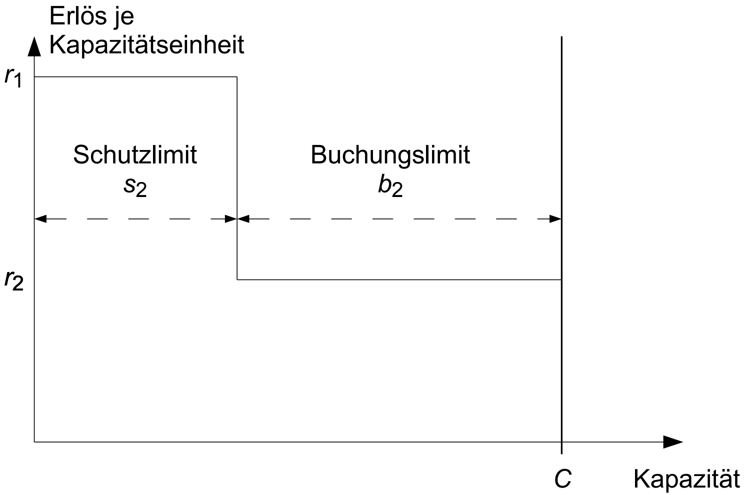
Annahmen

- Hotel mit C Zimmern
- Betrachtung einer bestimmten zukünftigen Nacht
- Zufällige Nachfrage D_1 der Geschäftsreisenden
- Zahlungsbereitschaft der Geschäftsreisenden r_1
- Zahlungsbereitschaft der Touristen r_2 mit $r_2 < r_1$
- Touristen buchen zuerst

Idee: Einführung eines Schutzlimits s_2 mit

$$C = b_2 + s_2 \tag{1}$$

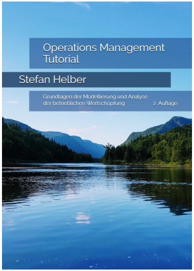
Schutzlimit zur Kapazitätssteuerung



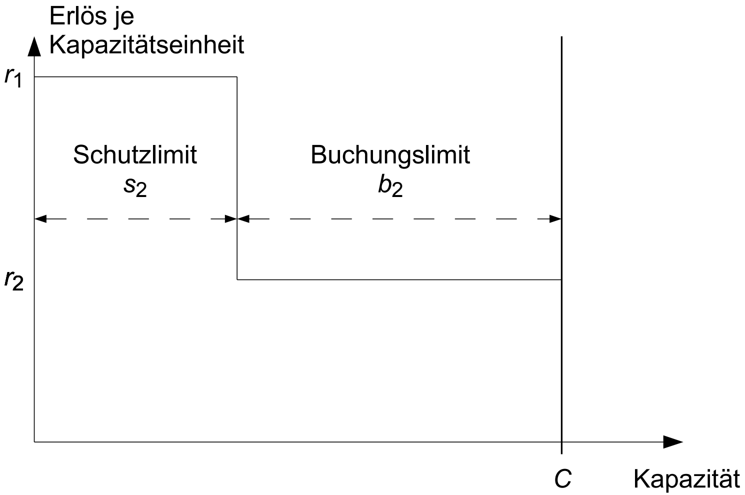
Annahme von Aufträgen und Buchungen

Kapazitätssteuerung II: Berechnung eines Schutzlimits

Prof. Dr. Stefan Helber



Schutzlimit zur Kapazitätssteuerung



Ausgangspunkt

Szenario: Konkrete Anfrage eines Touristen liegt vor

- gegenwärtige Restkapazität c
- Annahme der Buchung des Touristen: Sicherer Erlös r_2
- Erwarteter Erlös des c-ten Zimmers, falls $s_2 = c$ gesetzt (und Tourist abgewiesen) wird: $r_1 \cdot \text{Prob}[D_1 \geq c]$
- im Optimum Indifferenz, Gleichgewicht in marginal-analytischem Optimierungskalkül

Bei Abstraktion von Ganzzahligkeit:

$$r_2 = r_1 \cdot \text{Prob}[D_1 \geq s_2^*]$$

Bedingung für Optimalität des Schutzlimits!

Auflösen nach dem Schutzlimit

$$r_2 = r_1 \cdot \text{Prob}[D_1 \geq s_2^*] = r_1 \cdot (1 - \text{Prob}[D_1 \leq s_2^*])$$

$$\frac{r_2}{r_1} = 1 - \text{Prob}[D_1 \leq s_2^*]$$

$$\text{Prob}[D_1 \leq s_2^*] = 1 - \frac{r_2}{r_1} \tag{1}$$

$$F_{D_1}(s_2^*) = 1 - \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1 - r_2}{r_1} \tag{2}$$

$$s_2^* = F_{D_1}^{-1}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1}\right) \tag{3}$$

Poissonverteilte Nachfrage

Poissonverteilte Zufallsvariable D_1 mit dem Parameter $\lambda > 0$ besitzt die Wahrscheinlichkeitsfunktion

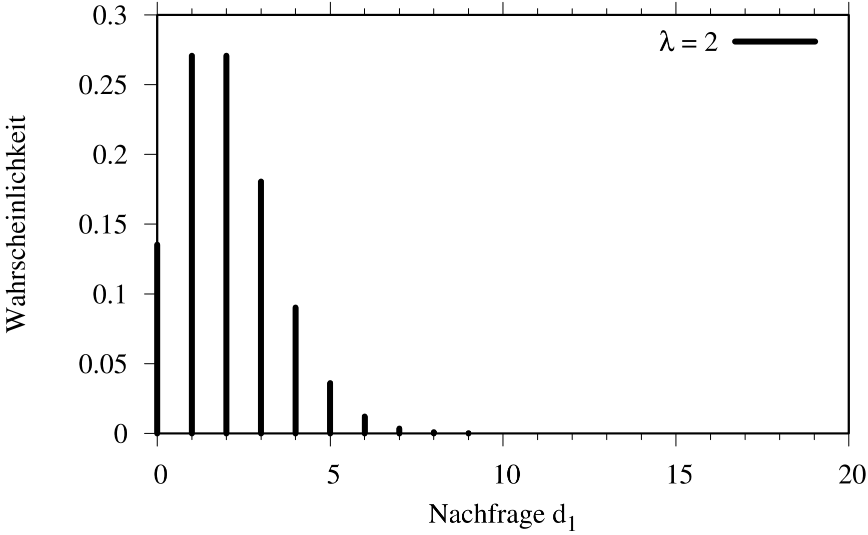
$$\text{Prob}[D_1 = i] = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

und die Verteilungsfunktion

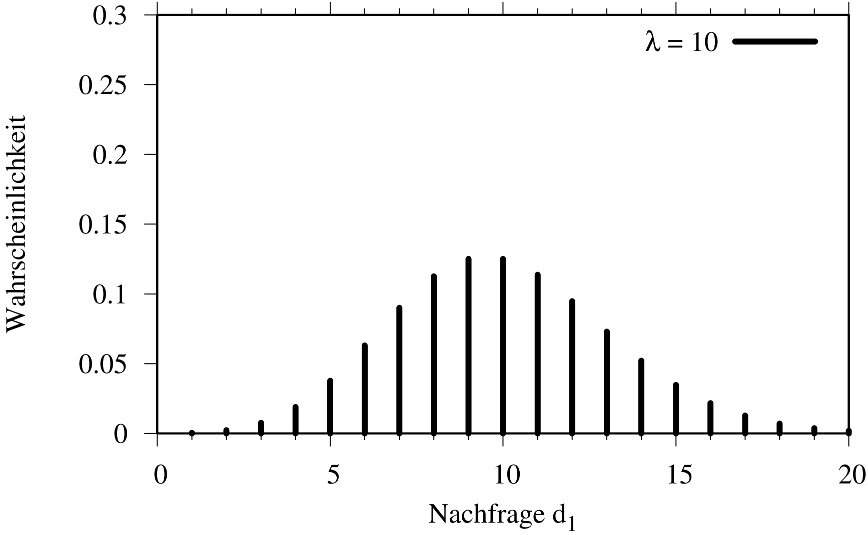
$$F_{D_1}(d_1) = \text{Prob}[D_1 \leq d_1] = \sum_{i=0}^{d_1} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}. \tag{5}$$

Ist die Zufallsvariable D_1 poissonverteilt, so gilt für ihren Erwartungswert und ihre Varianz $\mu_{D_1} = \sigma_{D_1}^2 = \lambda$.

Beispiel: Poissonverteilung mit $\lambda = 2$



Beispiel: Poissonverteilung mit $\lambda = 10$



Rechnen mit der Poissonverteilung

	A	B	C	D	E	
1	Erw. Nachfrage		10			
2	Erlös r1 =		200			
3						
4		**Poissonverteilung**				N
5						V
6						
7	**s2**	**Prob[D1<s2]**	**Prob[D1 >= s2]**	**r_1*Prob[D1>=s2]**		
8	0	0	=1-B8	=$C$2*C8		=
9	=A8+1	=POISSON(A9-1;$C$1;WAHR)	=1-B9	=$C$2*C9		=
10	=A9+1	=POISSON(A10-1;$C$1;WAHR)	=1-B10	=$C$2*C10		=
11	=A10+1	=POISSON(A11-1;$C$1;WAHR)	=1-B11	=$C$2*C11		=
12	=A11+1	=POISSON(A12-1;$C$1;WAHR)	=1-B12	=$C$2*C12		=
13	=A12+1	=POISSON(A13-1;$C$1;WAHR)	=1-B13	=$C$2*C13		=
14	=A13+1	=POISSON(A14-1;$C$1;WAHR)	=1-B14	=$C$2*C14		=
15	=A14+1	=POISSON(A15-1;$C$1;WAHR)	=1-B15	=$C$2*C15		=
16	=A15+1	=POISSON(A16-1;$C$1;WAHR)	=1-B16	=$C$2*C16		=
17	=A16+1	=POISSON(A17-1;$C$1;WAHR)	=1-B17	=$C$2*C17		=
18	**=A17+1**	=POISSON(A18-1;$C$1;WAHR)	=1-B18	**=$C$2*C18**		=
19	=A18+1	=POISSON(A19-1;$C$1;WAHR)	=1-B19	=$C$2*C19		=
20	=A19+1	=POISSON(A20-1;$C$1;WAHR)	=1-B20	=$C$2*C20		=
21	=A20+1	=POISSON(A21-1;$C$1;WAHR)	=1-B21	=$C$2*C21		=
22	=A21+1	=POISSON(A22-1;$C$1;WAHR)	=1-B22	=$C$2*C22		=

Rechnen mit der Poissonverteilung

	A	B	C	D	E	F	G
1	Erw. Nachfrage E[D1]		10				
2	Erlös r1 =		250				
3							
4		**Poissonverteilung**				**Normalverteilung**	
5						Varianz	10
6							
7	**s2**	**Prob[D1<s2]**	**Prob[D1 >= s2]**	**r_1*Prob[D1>=s2]**		**Prob[D1 >= s2]**	**r_1*Prob[D1>=s2]**
8	0	0,000	1,000	250,00		0,999	249,80
9	1	0,000	1,000	249,99		0,998	249,45
10	2	0,000	1,000	249,88		0,994	248,57
11	3	0,003	0,997	249,31		0,987	246,64
12	4	0,010	0,990	247,42		0,971	242,78
13	5	0,029	0,971	242,69		0,943	235,77
14	6	0,067	0,933	233,23		0,897	224,26
15	7	0,130	0,870	217,46		0,829	207,15
16	8	0,220	0,780	194,94		0,736	184,11
17	9	0,333	0,667	166,80		0,624	156,02
18	10	0,458	0,542	135,52		0,500	125,00
19	11	0,583	0,417	104,24		0,376	93,98
20	**12**	0,697	0,303	**75,81**		0,264	65,89
21	13	0,792	0,208	52,11		0,171	42,85
22	14	0,864	0,136	33,88		0,103	25,74

Exakte Rechnung mit der Poissonverteilung

Ergebnis der Rechnung mit der Poissonverteilung

- optimales Schutzlimit beträgt 12 Zimmer
- damit Erwartungswert des Erlöses des 12. Zimmers 75,81 GE durch Geschäftsreisende (mehr als der sichere Erlös von 75 GE bei Vermietung an einen Touristen)

Approximation durch die Normalverteilung

Aus

$$D_1 = \sigma_{D_1} \cdot X + \mu_{D_1} \tag{6}$$

folgt

$$\mathrm{Prob}[D_1 \leq s_2^*] = 1 - \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1 - r_2}{r_1}$$

$$\mathrm{Prob}[\sigma_{D_1} \cdot X + \mu_{D_1} \leq s_2^*] = \frac{r_1 - r_2}{r_1}$$

$$\mathrm{Prob}\left[X \leq \frac{s_2^* - \mu_{D_1}}{\sigma_{D_1}}\right] = \frac{r_1 - r_2}{r_1}$$

$$F_X\left(\frac{s_2^* - \mu_{D_1}}{\sigma_{D_1}}\right) = \frac{r_1 - r_2}{r_1} \tag{7}$$

$$\frac{s_2^* - \mu_{D_1}}{\sigma_{D_1}} = F_X^{-1}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1}\right)$$

$$s_2^* = \sigma_{D_1} \cdot F_X^{-1}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1}\right) + \mu_{D_1} \tag{8}$$

Vorgehensweise

Erinnerung: Ist die Zufallsvariable D_1 poissonverteilt, so gilt für ihren Erwartungswert und ihre Varianz $\mu_{D_1} = \sigma^2_{D_1} = \lambda$.

Drei Schritte:

1. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
2. Ermittlung des korrespondierenden Wertes $F_X^{-1}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1}\right)$
3. Berechnung des Schutzlimits $s_2^* = \sigma_{D_1} \cdot F_X^{-1}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1}\right) + \mu_{D_1}$

Beispiel

Gegeben: $\lambda_1 = 10$, $r_1 = 250$ und $r_2 = 70$

- $\mu_{D_1} = \lambda_1 = 10$, $\sigma_{D_1} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{10}$
- $\frac{r_1 - r_2}{r_1} = \frac{250-70}{250} = 0{,}72$
- $F_X(x = 0{,}58) \approx 0{,}72$, also $F_X^{-1}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1} \approx 0{,}72\right) = 0{,}58$
- $s_2 = \sigma_{D_1} \cdot F_X^{-1}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1}\right) + \mu_{D_1} \approx \sqrt{10} \cdot 0{,}58 + 10 \approx 11{,}83$
- Abrunden auf 11 Zimmer, erwarteter Erlös des 11. Zimmers dann 93,98 GE, größer als sicherer Erlös von 75 GE von Touristen

Vergleich: Rechnung mit der Poissonverteilung führt auf 12 Zimmer!

Rechnen mit der Poissonverteilung

	A	B	C	D	E	F	G
1	Erw. Nachfrage E[D1]		10				
2	Erlös r1 =		250				
3							
4		**Poissonverteilung**				**Normalverteilung**	
5						Varianz	10
6							
7	**s2**	**Prob[D1<s2]**	**Prob[D1 >= s2]**	**r_1*Prob[D1>=s2]**		**Prob[D1 >= s2]**	**r_1*Prob[D1>=s2]**
8	0	0,000	1,000	250,00		0,999	249,80
9	1	0,000	1,000	249,99		0,998	249,45
10	2	0,000	1,000	249,88		0,994	248,57
11	3	0,003	0,997	249,31		0,987	246,64
12	4	0,010	0,990	247,42		0,971	242,78
13	5	0,029	0,971	242,69		0,943	235,77
14	6	0,067	0,933	233,23		0,897	224,26
15	7	0,130	0,870	217,46		0,829	207,15
16	8	0,220	0,780	194,94		0,736	184,11
17	9	0,333	0,667	166,80		0,624	156,02
18	10	0,458	0,542	135,52		0,500	125,00
19	11	0,583	0,417	104,24		0,376	93,98
20	**12**	0,697	0,303	**75,81**		0,264	65,89
21	13	0,792	0,208	52,11		0,171	42,85
22	14	0,864	0,136	33,88		0,103	25,74

Ergebnis

Kapazitätssteuerung durch Buchungslimit

- einfachste Modellvorstellung
- in der Realität komplexere Problemstellungen
- Anwendung in Luftfahrt, Hotellerie, Mietwagengeschäft
- ...