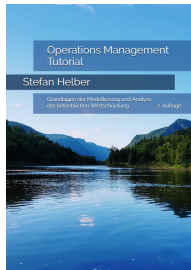


Prozessanalyse II: Auswirkungen von Organisationsentscheidungen

Mehrere Server, getrennte vs. gemeinsame Warteschlangen

Prof. Dr. Stefan Helber



Angangspunkt: Grundmodell

Ankünfte

Warteraum

N parallele
Server



Parameter

- Ankünfte mit Rate $\lambda = \frac{1}{E[T_a]}$, Bearbeitung mit Rate $\mu = \frac{1}{E[T_s]}$
- N Server
- Auslastung $\rho = \frac{\lambda}{N \cdot \mu} = \frac{E[T_s]}{N \cdot E[T_a]}$
- Variationskoeffizienten $c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{E[T_a]} = \sigma_{T_a} \cdot \lambda$ und $c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{E[T_s]} = \sigma_{T_s} \cdot \mu$

Abschätzung der mittleren Wartezeit

$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho \sqrt{2(N+1)} - 1}{N(1 - \rho)} \frac{1}{\mu}$$

Beispiel: Getrennte vs. gemeinsame Schlangen

Telefonische Kundenbetreuung, Variante I

- vier Kundengruppen, je ein Kundenbetreuer
- je Gruppe eine Telefonnummer und Warteschlange
- mittlere Servicezeit 10 Minuten
- Standardabweichung der Servicezeit fünf Minuten
- je Kundengruppe fünf Anrufe je Stunde
- Standardabweichung der Zwischenanrufzeit je Gruppe 12 Minuten

Mittlere Wartezeit der Anrufe?

Getrennte Warteschlangen, Ein-Server-Systeme I

1 Zwischenanrufzeiten:

$$E[T_a] = 12 \text{ min}$$

$$\sigma_{T_a} = 12 \text{ min}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{E[T_a]} = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{12} \text{ min}^{-1}$$

2 Bearbeitungszeiten:

$$E[T_s] = 10 \text{ min}$$

$$\sigma_{T_s} = 5 \text{ min}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{E[T_s]} = 0,5$$

$$\mu = \frac{1}{10} \text{ min}^{-1}$$

Getrennte Warteschlangen, Ein-Server-Systeme II

3 Auslastung:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{12} = 83,3\%$$

4 Wartezeit:

$$\begin{aligned} E[W_q] &\approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{1 + 0,5^2}{2} \frac{10/12}{1 - 10/12} \cdot 10 \text{ min} \\ &= 31,25 \text{ min} \end{aligned}$$

5 Summe aus Wartezeit und Bedienzeit:

$$E[W] = 31,25 \text{ min} + 10 \text{ min} = 41,25 \text{ min}$$

Telefonische Kundenbetreuung, Variante II

- vier Kundengruppen und Kundenbetreuer zusammenfassen
- eine Telefonnummer und Warteschlange
- mittlere Servicezeit 10 Minuten
- Standardabweichung der Servicezeit fünf Minuten
- vier Server
- 20 Anrufe je Stunde
- Standardabweichung der Zwischenanrufzeit drei Minuten

Mittlere Wartezeit der Anrufe?

Gemeinsame Warteschlange, Vier-Server-System I

1 Zwischenanrufzeiten:

$$E[T_a] = \frac{12 \text{ min}}{4} = 3 \text{ min}$$

$$\sigma_{T_a} = \frac{12 \text{ min}}{4} = 3 \text{ min}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{E[T_a]} = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \text{ min}^{-1}$$

Gemeinsame Warteschlange, Vier-Server-System II

2 Bearbeitungszeiten:

$$E[T_s] = 10 \text{ min}$$

$$\sigma_{T_s} = 5 \text{ min}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{E[T_s]} = 0,5$$

$$\mu = \frac{1}{10} \text{ min}^{-1}$$

3 Auslastung bei $N = 4$ Servern:

$$\rho = \frac{\lambda}{N \cdot \mu} = \frac{10}{4 \cdot 3} = 83,3\%$$

Gemeinsame Warteschlange, Vier-Server-System III

4. Wartezeit:

$$\begin{aligned} E[W_q] &\approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho \sqrt{2(N+1)} - 1}{N(1-\rho)} \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{1 + 0,5^2}{2} \frac{(10/12) \sqrt{2(4+1)} - 1}{4 \cdot (1 - 10/12)} \cdot 10 \text{ min} \\ &= 6,32 \text{ min} \end{aligned}$$

5. Summe aus Wartezeit und Bedienzeit:

$$E[W] = 6,32 \text{ min} + 10 \text{ min} = 16,32 \text{ min}$$

Ergebnis

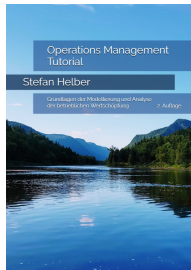
Intuition

- gleiche mittlere Auslastung
- geringere mittlere Wartezeiten
- andere Situation bei unterschiedlichen Kundengruppen

Prozessanalyse II: Auswirkungen von Organisationsentscheidungen

Mehrere langsame vs. ein schneller Server

Prof. Dr. Stefan Helber



Angangspunkt: Grundmodell

Ankünfte

Warteraum

N parallele
Server



Parameter

- Ankünfte mit Rate $\lambda = \frac{1}{E[T_a]}$, Bearbeitung mit Rate $\mu = \frac{1}{E[T_s]}$
- N Server
- Auslastung $\rho = \frac{\lambda}{N \cdot \mu} = \frac{E[T_s]}{N \cdot E[T_a]}$
- Variationskoeffizienten $c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{E[T_a]} = \sigma_{T_a} \cdot \lambda$ und $c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{E[T_s]} = \sigma_{T_s} \cdot \mu$

Abschätzung der mittleren Wartezeit

$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho \sqrt{2(N+1)} - 1}{N(1-\rho)} \frac{1}{\mu}$$

Vergleich

Annahmen

- Bedienrate des einen schnellen Server μ_1
- Bedienrate jedes der N langsamen Server $\mu_N = \frac{\mu_1}{N}$
- Ersatz des einen schnellen Servers durch N langsame Server

Auslastung

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{\lambda}{N \cdot \mu_N} = \rho_N = \rho$$

Bedienzeit

$$E[T_{S,N}] = \frac{1}{\mu_N} = \frac{N}{\mu_1} = N \cdot E[T_{S,1}]$$

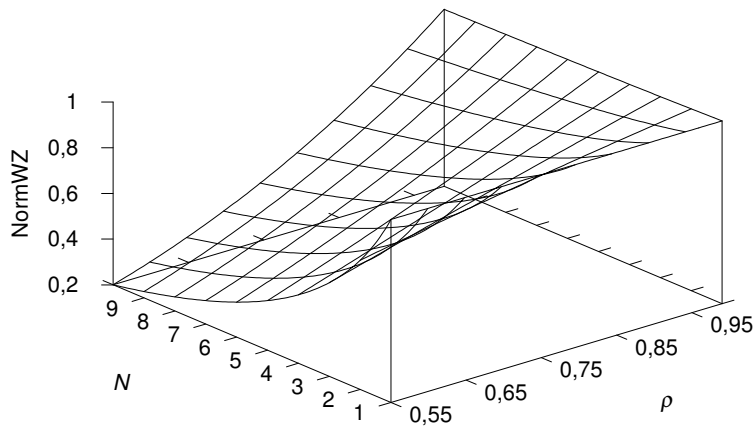
Anstieg der normierten Bedienzeiten $\frac{E[T_{S,N}]}{E[T_{S,1}]} = N$

Betrachtung normierter Wartezeiten

$$\begin{aligned}\frac{E[W_{q,N}]}{E[W_{q,1}]} &\approx \frac{\frac{c_a^2+c_s^2}{2} \frac{\rho\sqrt{2(N+1)-1}}{N(1-\rho)} \frac{1}{\mu_N}}{\frac{c_a^2+c_s^2}{2} \frac{\rho}{(1-\rho)} \frac{1}{\mu_1}} = \frac{\frac{\rho\sqrt{2(N+1)-1}}{N(1-\rho)} \frac{N}{\mu_1}}{\frac{\rho}{(1-\rho)} \frac{1}{\mu_1}} \\ &= \frac{\rho\sqrt{2(N+1)-1}}{\rho} = \rho\sqrt{2(N+1)-2}\end{aligned}$$

Rückgang der normierten Wartezeiten

Betrachtung normierter Wartezeiten

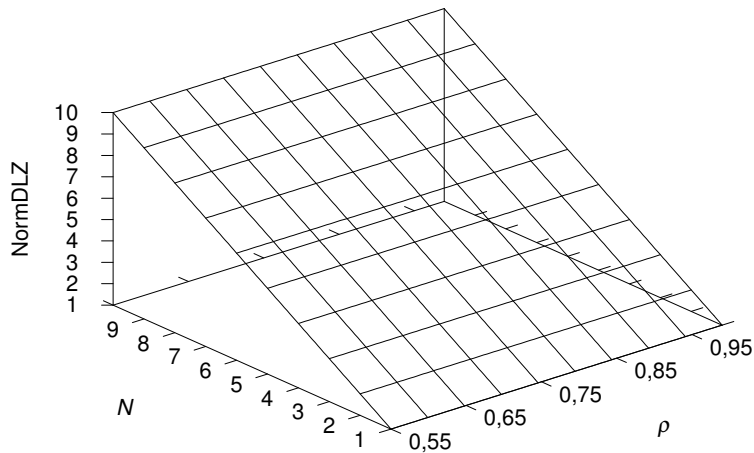


Betrachtung normierter Durchlaufzeiten

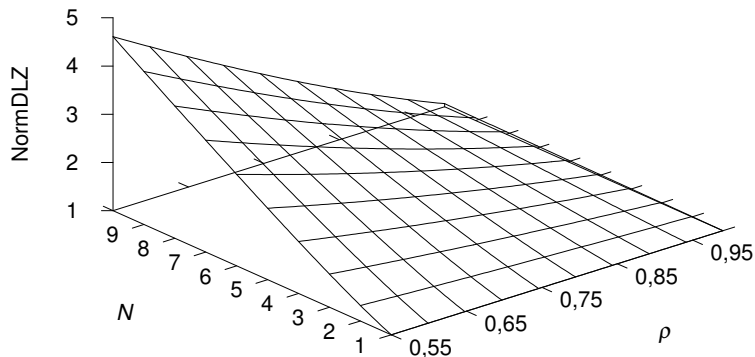
$$\begin{aligned}\frac{E[W_N]}{E[W_1]} &\approx \frac{\frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho \sqrt{2(N+1)} - 1}{N(1-\rho)} \frac{1}{\mu_N} + \frac{1}{\mu_N}}{\frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{(1-\rho)} \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1}} = \frac{\frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho \sqrt{2(N+1)} - 1}{N(1-\rho)} \frac{N}{\mu_1} + \frac{N}{\mu_1}}{\frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{(1-\rho)} \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1}} \\ &= \frac{\frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho \sqrt{2(N+1)} - 1}{(1-\rho)} + N}{\frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{(1-\rho)} + 1}\end{aligned}$$

Betrachtung zweier Fälle: $c_a = c_s = 0$ sowie $c_a = c_s = 1$

Normierte Durchlaufzeiten, Fall $c_a = c_s = 0$



Normierte Durchlaufzeiten, Fall $c_a = c_s = 1$



Fazit im Fall gleicher Auslastung

Mehrere langsame statt einer schnellen Maschine

- Rückgang der Wartezeiten
- Anstieg der Bedienzeiten
- tendenziell Anstieg der Durchlaufzeiten

Beispiel: Check-in-Automaten am Flughafen

Ankunftsprozess

- drei Passagiere je Minute
- Variationskoeffizient $c_a = 1$

Check-in-System 1 (alt)

- mittlere Check-in-Dauer drei Minuten
- Variationskoeffizient $c_s = 1$
- 10 Maschinen

Check-in-System 2 (neu)

- mittlere Check-in-Dauer zwei Minuten
- Variationskoeffizient $c_s = 1$
- 7 Maschinen

Altes System

Auslastung

$$\rho = \frac{\lambda}{N\mu} = \frac{3 \text{ min}^{-1}}{10 \cdot \frac{1}{3} \text{ min}^{-1}} = 0,9$$

Wartezeitabschätzung

$$\begin{aligned} E[W_q] &\approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \cdot \frac{\rho \sqrt{2(N+1)} - 1}{N(1-\rho)} \cdot \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{1+1}{2} \cdot \frac{0,9 \sqrt{2(10+1)} - 1}{10 \cdot (1-0,9)} \cdot 3 \text{ min} \\ &= 2,03 \text{ min} \end{aligned}$$

Neues System

Auslastung

$$\rho = \frac{\lambda}{N\mu} = \frac{3 \text{ min}^{-1}}{7 \cdot \frac{1}{2} \text{ min}^{-1}} = \frac{6}{7} \approx 85,7\%$$

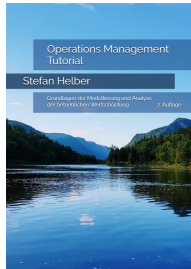
Wartezeitabschätzung

$$\begin{aligned} E[W_q] &\approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \cdot \frac{\rho \sqrt{2(N+1)} - 1}{N(1-\rho)} \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{1+1}{2} \cdot \frac{\frac{6}{7} \sqrt{2(7+1)} - 1}{7 \cdot (1 - \frac{6}{7})} \cdot 2 \text{ min} \\ &= 1,26 \text{ min} \end{aligned}$$

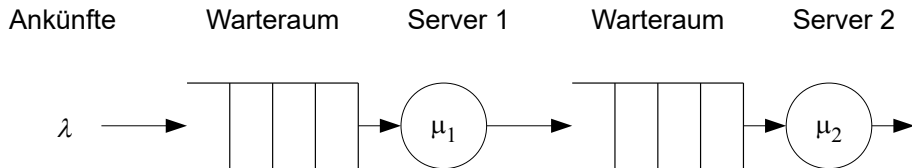
Prozessanalyse II: Auswirkungen von Organisationsentscheidungen

Ausbreitung von Variabilität in mehrstufigen Systemen

Prof. Dr. Stefan Helber



Mehrstufige Systeme



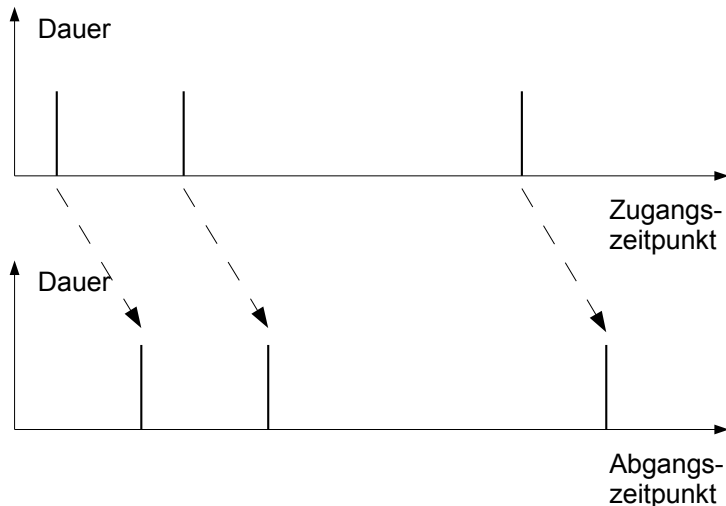
Erhaltung des Materialflusses

$$\lambda(1) = \lambda(2) = \dots = \lambda$$

$$c_d(i) = c_a(i + 1)$$

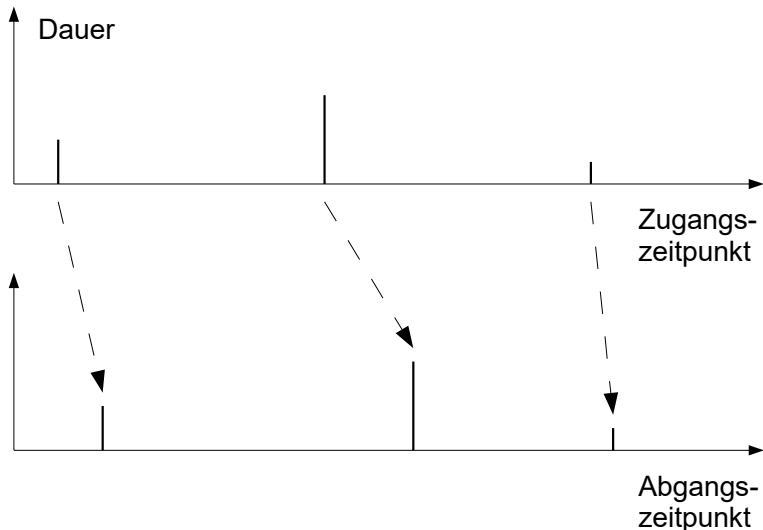
Zu- und Abgang bei niedriger Auslastung

Fall 1: Niedrige Variabilität der Prozessdauer

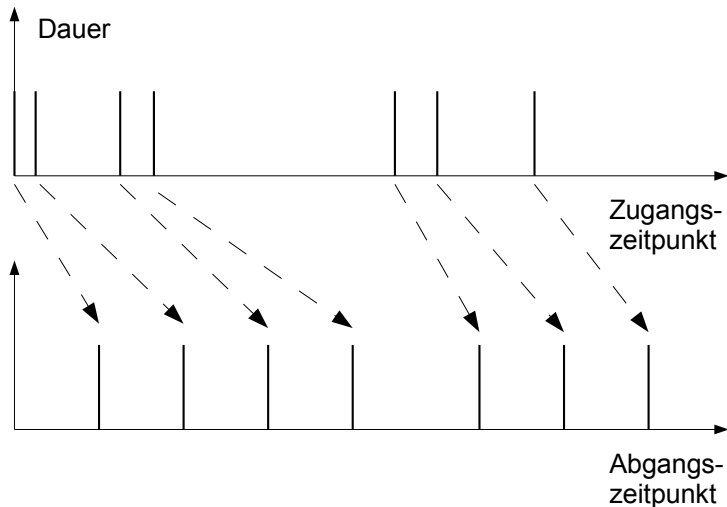


Zu- und Abgang bei niedriger Auslastung

Fall 2: Hohe Variabilität der Prozessdauer



Zu- und Abgang bei hoher Auslastung



Zwischenergebnis

Variabilität des Abgangsprozesses $c_d(i)$

- ähnelt bei niedriger Auslastung $\rho(i)$ der Variabilität $c_a(i)$ des Ankunftsprozesses
- ähnelt bei hoher Auslastung $\rho(i)$ der Variabilität $c_s(i)$ des Bedienprozesses

Approximation im Ein-Server-Fall

$$c_d^2(i) \approx (1 - \rho(i)^2) \cdot c_a^2(i) + \rho(i)^2 \cdot c_s^2(i)$$

Approximation im N -Server-Fall

$$c_d^2(i) \approx (1 - \rho(i)^2) \cdot c_a^2(i) + \rho(i)^2 \cdot \frac{c_s^2(i) + \sqrt{N_i} - 1}{\sqrt{N_i}}$$

Beispiel: Fließproduktionssystem mit drei Stufen

Stufe I

- hungert nie
- arbeitet deterministisch
- bildet den Ankunftsprozess für Stufe II
- $\mu(1) = \lambda(2) = 35 \text{ h}^{-1}$, $c_d(1) = c_a(2) = 0$

Stufe II

- $\lambda(2) = 35 \text{ h}^{-1}$, $c_d(1) = c_a(2) = 0$
- gelegentliche Ausfälle
- lange Reparaturdauern
- effektiver Bedienprozess mit $\mu(2) = 37,5 \text{ h}^{-1}$, $c_s(2) = 4$

Stufe III

- $\lambda(3) = 35 \text{ h}^{-1}$, $c_d(2) = c_a(3) = ?$
- effektiver Bedienprozess mit $\mu(3) = 36 \text{ h}^{-1}$, $c_s(3) = 0,5$

Analyse Stufe II

Auslastung

$$\rho(2) = \frac{\lambda}{\mu(2)} = \frac{35 \text{ h}^{-1}}{37,5 \text{ h}^{-1}} = 93,3\bar{3}\%$$

Durchlaufzeit

$$\begin{aligned} E[W(2)] &\approx \frac{c_a(2)^2 + c_s(2)^2}{2} \frac{\rho(2)}{1 - \rho(2)} \frac{1}{\mu(2)} + \frac{1}{\mu(2)} \\ &= \frac{0^2 + 4^2}{2} \frac{\frac{35}{37,5}}{1 - \frac{35}{37,5}} \frac{1}{37,5} \text{ h} + \frac{1}{37,5} \text{ h} \\ &= 3,01\bar{3} \text{ h} \end{aligned}$$

Bestand

$$E[L(2)] = \lambda E[W(2)] = 35 \text{ h}^{-1} \cdot 3,01\bar{3} \text{ h} = 105,4\bar{6}$$

Analyse Stufe III (Teil 1)

Variationskoeffizient der Zwischenankunftszeiten

$$\begin{aligned}c_a(3) &= c_d(2) = \sqrt{(1 - \rho(2)^2) \cdot c_a^2(2) + \rho(2)^2 \cdot c_s^2(2)} \\ &= \sqrt{(1 - 0,9\bar{3}^2) \cdot 0^2 + 0,9\bar{3}^2 \cdot 4^2} = 3,7\bar{3}\end{aligned}$$

Auslastung

$$\rho(3) = \frac{\lambda}{\mu(3)} = \frac{35 \text{ h}^{-1}}{36 \text{ h}^{-1}} = 97,2\%$$

Analyse Stufe III (Teil 2)

Durchlaufzeit

$$\begin{aligned} E[W(3)] &\approx \frac{c_a(3)^2 + c_s(3)^2}{2} \frac{\rho(3)}{1 - \rho(3)} \frac{1}{\mu(3)} + \frac{1}{\mu(3)} \\ &= \frac{3,7\bar{3}^2 + 0,5^2}{2} \frac{\frac{35}{36}}{1 - \frac{35}{36}} \frac{1}{36} \text{ h} + \frac{1}{36} \text{ h} \\ &= 6,92\bar{3} \text{ h} \end{aligned}$$

Bestand

$$E[L(3)] = \lambda E[W(3)] = 35 \text{ h}^{-1} \cdot 6,92\bar{3} \text{ h} = 242,2\bar{6}$$

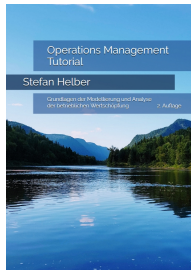
Fortpflanzung und Auswirkung von Variabilität

- hohe Auslastung von Station 2
- hohe Variabilität der effektiven Prozesszeit an Station 2
- Konsequenz 1: hohe Bestände *vor* Station 2
- Konsequenz 2: hohe Bestände *nach* Station 2

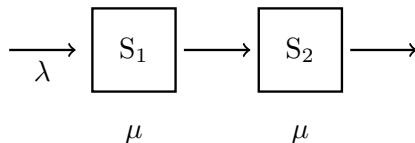
Prozessanalyse II: Auswirkungen von Organisationsentscheidungen

Arbeitsteilung, Variabilität und Wartezeiten

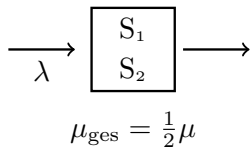
Prof. Dr. Stefan Helber



Aufteilung oder Zusammenfassung von Aufgaben



(a) Zwei Bedienstationen mit je einem Server



(b) Ein Bedienstation mit zwei parallelen Servern

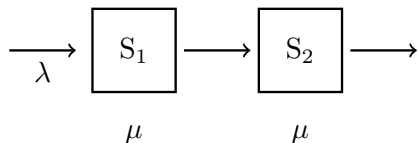
Abbildung: Alternative Systemkonfigurationen

Analyse: Auswirkung auf Durchlaufzeiten

Annahmen

- Zwischenankunftszeiten folgen Exponentialverteilungen mit Rate $\lambda = 0,9 \text{ ZE}^{-1}$
- Bearbeitungszeiten **einzelner Prozessschritte** folgen Exponentialverteilungen (somit $c_T^2 = 1$) mit Rate $\mu = 1 \text{ ZE}^{-1}$
- Bearbeitungszeiten **einzelner Prozessschritte** unabhängig voneinander

Analyse des ersten Systems



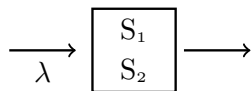
Durchlaufzeit je Stufe

$$E[W_1] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} = \frac{1 + 1}{2} \frac{0,9}{1 - 0,9} 1 \text{ ZE} + 1 \text{ ZE} = 10 \text{ ZE} \quad (1)$$

Durchlaufzeit durch das Gesamtsystem

$$E[W_{\text{ges}}] = E[W_1] + E[W_2] = 2 \cdot 10 \text{ ZE} = 20 \text{ ZE} \quad (2)$$

Analyse des zweiten Systems I



$$\mu_{\text{ges}} = \frac{1}{2}\mu$$

$$E[T_{\text{ges}}] = E[T_1] + E[T_2] = 2 \cdot E[T] = 2 \cdot 1 \text{ ZE} = 2 \text{ ZE} \quad (3)$$

Bedienrate eines solchen Servers

$$\mu_{\text{ges}} = \frac{1}{E[T_{\text{ges}}]} = \frac{1}{2} \text{ ZE}^{-1} \quad (4)$$

Varianz der Bedienzeit

$$\text{VAR}[T_{\text{ges}}] = \text{VAR}[T_1] + \text{VAR}[T_2] = \text{VAR}[T] + \text{VAR}[T] = 2 \cdot \text{VAR}[T] \quad (5)$$

Analyse des zweiten Systems II

quadrierter Variationskoeffizient mit $c_T^2 = 1$

$$c_{\text{ges}}^2 = \frac{\text{VAR}[T_{\text{ges}}]}{E[T_{\text{ges}}]^2} = \frac{2 \cdot \text{VAR}[T]}{4 \cdot E[T]^2} = \frac{1}{2} c_T^2 = \frac{1}{2} \quad (6)$$

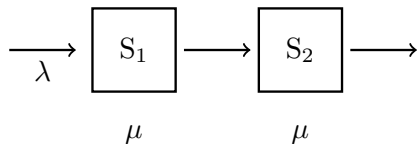
Auslastung

$$\rho = \frac{\lambda}{N \cdot \mu_{\text{ges}}} = \frac{0,9 \text{ ZE}^{-1}}{2 \cdot \frac{1}{2} \text{ ZE}^{-1}} = 0,9 \quad (7)$$

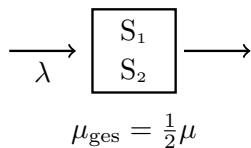
erwartete Durchlaufzeit mit $c_s^2 = c_{\text{ges}}^2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} E[W] &\approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \cdot \frac{\rho \sqrt{2 \cdot (N+1)} - 1}{N \cdot (1 - \rho)} \cdot \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{0,9 \sqrt{2 \cdot (2+1)} - 1}{2 \cdot (1 - 0,9)} \cdot 2 \text{ ZE} + 2 \\ &\approx 8,4378 \text{ ZE} \end{aligned} \quad (8)$$

Ergebnis



Erwartungswert der Durchlaufzeit 20 ZE



Erwartungswert der Durchlaufzeit 8,4378 ZE

Variationskoeffizient der Summe von Zufallsvariablen

Summe jeweils identisch und unabhängig verteilter Zufallsvariablen

$T_i, i = 1, \dots, k$

$$\text{VAR}[T_{\text{ges}}] = \text{VAR}[T_1] + \text{VAR}[T_2] + \dots + \text{VAR}[T_k] = k \cdot \text{VAR}[T] \quad (9)$$

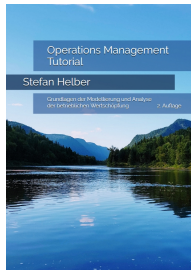
Variationskoeffizienten der Summe

$$c_{\text{ges}}^2 = \frac{\text{VAR}[T_{\text{ges}}]}{E[T_{\text{ges}}]^2} = \frac{k \cdot \text{VAR}[T]}{k^2 \cdot E[T]^2} = \frac{1}{k} c_T^2. \quad (10)$$

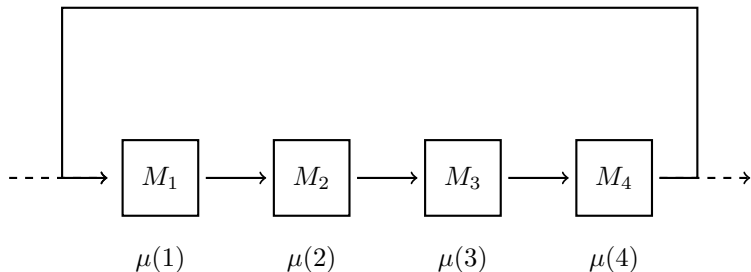
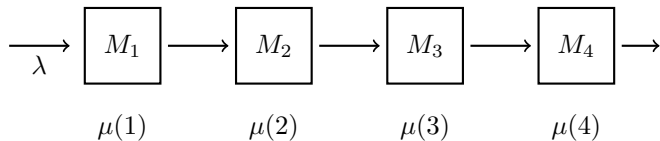
Prozessanalyse II: Auswirkungen von Organisationsentscheidungen

Produktionssteuerung nach dem Push- bzw. dem Pull-Prinzip

Prof. Dr. Stefan Helber



Vergleich von Push- und Pull-Produktionssteuerung



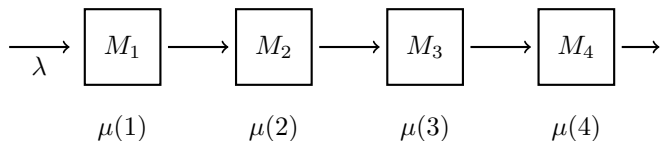
Parameter des Produktionssystems

(Mittlere) Bearbeitungsdauer je Prozessschritt bzw. Maschine

Prozessschritt/Maschine	1	2	3	4
(Mittlere) Dauer $E[T_s(i)]$ [ZE]	20	10	30	20

Bearbeitungszeiten exponentialverteilt mit Raten $\mu(1), \dots, \mu(4)$

Push-Produktionssteuerung



Zwei Fälle:

- **Push 1:** Zwischenankunftszeiten folgen Exponentialverteilung, also $c_a^2 = 1$
- **Push 2:** Zwischenankunftszeiten stets identisch, also $c_a^2 = 0$

Steuerung des Systems über die Ankunftsrate λ

Analyse des Push-Systems I

Auslastungen

$$\rho(i) = \frac{\lambda}{\mu(i)}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (1)$$

Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten

$$c_a^2(i) = c_a^2(i-1) \approx (1 - \rho(i-1)^2) \cdot c_a^2(i-1) + \rho(i-1)^2 \cdot c_s^2(i-1), \quad i = 2, \dots, l, \quad (2)$$

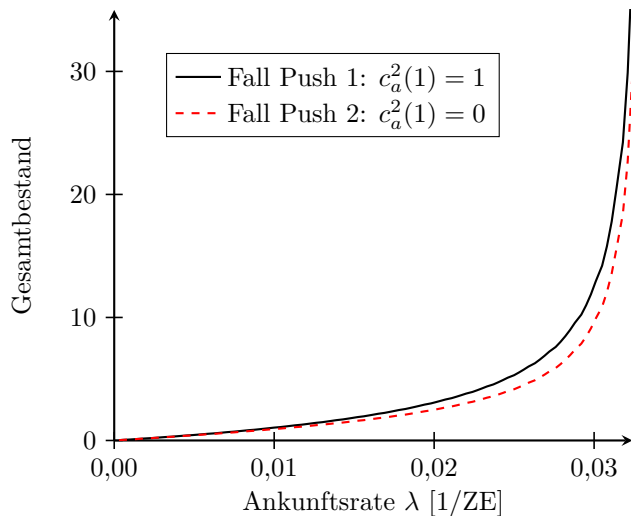
Bestand an Maschine i

$$E[L(i)] = \lambda \cdot E[W(i)] = \lambda \cdot \left(\frac{c_a^2(i) + 1}{2} \frac{\rho(i)}{1 - \rho(i)} \frac{1}{\mu(i)} + \frac{1}{\mu(i)} \right), \quad i = 1, \dots, l \quad (3)$$

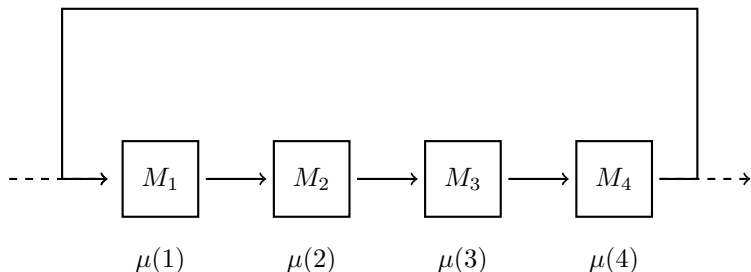
Gesamtbestand im System

$$E[L_{\text{ges}}] = \sum_{i=1}^4 E[L(i)] = \sum_{i=1}^4 \lambda \cdot \left(\frac{c_a^2(i) + 1}{2} \frac{\rho(i)}{1 - \rho(i)} \frac{1}{\mu(i)} + \frac{1}{\mu(i)} \right) \quad (4)$$

Analyse des Push-Systems II



Pull-Produktionssteuerung



Steuerung des Systems über den konstanten Bestand *WIP*

Analyse des Pull-Systems I

Ausgangspunkt System mit $WIP = 1$

$$E[W(i, WIP = 1)] = \frac{1}{\mu(i)}, \quad i = 1, \dots, I \quad (5)$$

Nun Betrachtung eines System mit $WIP \geq 2$ Werkstücken, so dass Warten möglich ist:

- Perspektive eines an Station i gerade eintreffenden Werkstücks
- Werkstück sieht ein *restliches* System mit $WIP - 1$ *anderen* Werkstücken
- Ermittlung des anteiligen Bestands an Station i am Gesamtbestand $WIP - 1$ des *restlichen* Systems

$$\frac{E[L(i, WIP - 1)]}{WIP - 1} = \frac{E[L(i, WIP - 1)]}{\sum_{k=1}^I E[L(k, WIP - 1)]} = \frac{E[W(i, WIP - 1)]}{\sum_{k=1}^I E[W(k, WIP - 1)]} \quad (6)$$

Analyse des Pull-Systems II

Neu eintreffendes Werkstück an Station i sieht dort also

$$E[L(i, WIP - 1)] = (WIP - 1) \cdot \frac{E[W(i, WIP - 1)]}{\sum_{k=1}^I E[W(k, WIP - 1)]} \quad (7)$$

andere Werkstücke des *restlichen* Systems mit einem Gesamtbestand $WIP - 1$

Erwartete *Durchlaufzeit*

- 1 der restlichen Bearbeitungszeit des aktuell bearbeiteten Werkstücks
- 2 der Bearbeitungszeit der schon wartenden Werkstücke
- 3 der Bearbeitungszeit des gerade ankommenden Werkstücks selbst

Analyse des Pull-Systems III

Rekursive Beziehung wegen Gedächtnislosigkeit einfach

$$\begin{aligned} E[W(i, WIP)] &= E[L(i, WIP - 1)] \frac{1}{\mu(i)} + \frac{1}{\mu(i)} \\ &= (WIP - 1) \cdot \frac{E[W(i, WIP - 1)]}{\sum_{k=1}^I E[W(k, WIP - 1)]} \frac{1}{\mu(i)} + \frac{1}{\mu(i)} \end{aligned} \quad (8)$$

führt auf

$$E[W(i = 1, WIP = 1)] = 20 \text{ ZE}$$

$$E[W(i = 2, WIP = 1)] = 10 \text{ ZE}$$

$$E[W(i = 3, WIP = 1)] = 30 \text{ ZE}$$

$$E[W(i = 4, WIP = 1)] = 20 \text{ ZE}$$

Analyse des Pull-Systems IV

Nun für Bestand $WIP = 2$ und erste Station $i = 1$

$$\begin{aligned} E[W(i = 1, WIP = 2)] &= (2 - 1) \cdot \frac{E[W(i = 1, WIP = 2 - 1 = 1)]}{\sum_{k=1}^I E[W(k, WIP = 2 - 1 = 1)]} \frac{1}{\mu(1)} + \frac{1}{\mu(1)} \\ &= \frac{20}{80} \cdot 20 \text{ ZE} + 20 \text{ ZE} = 25 \text{ ZE} \end{aligned}$$

$$E[W(i = 2, WIP = 2)] = 11,25 \text{ ZE}$$

$$E[W(i = 3, WIP = 2)] = 41,25 \text{ ZE}$$

$$E[W(i = 4, WIP = 2)] = 25 \text{ ZE}$$

Gesamtdurchlaufzeit 102,50 ZE und so mittlerer Bestand an Station 1

$$E[L(i = 1, WIP = 2)] = 2 \cdot \frac{25}{102,50} = 0,4878 \quad (9)$$

Gesetz von Little führt auf Durchsatz

$$TH(i = 1, WIP = 2) = \frac{E[L(i = 1, WIP = 2)]}{E[W(i = 1, WIP = 2)]} = \frac{0,4878}{25} \text{ ZE}^{-1} \approx 0,0195 \text{ ZE}^{-1} \quad (10)$$

Analyse des Pull-Systems V

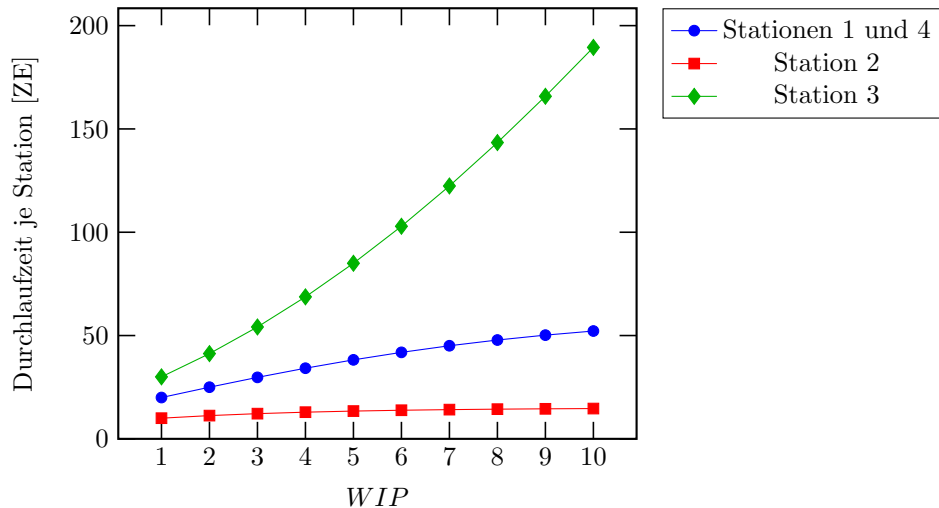
Auslastung

$$\rho(i, WIP) = \frac{TH(WIP)}{\mu(i)} \quad (11)$$

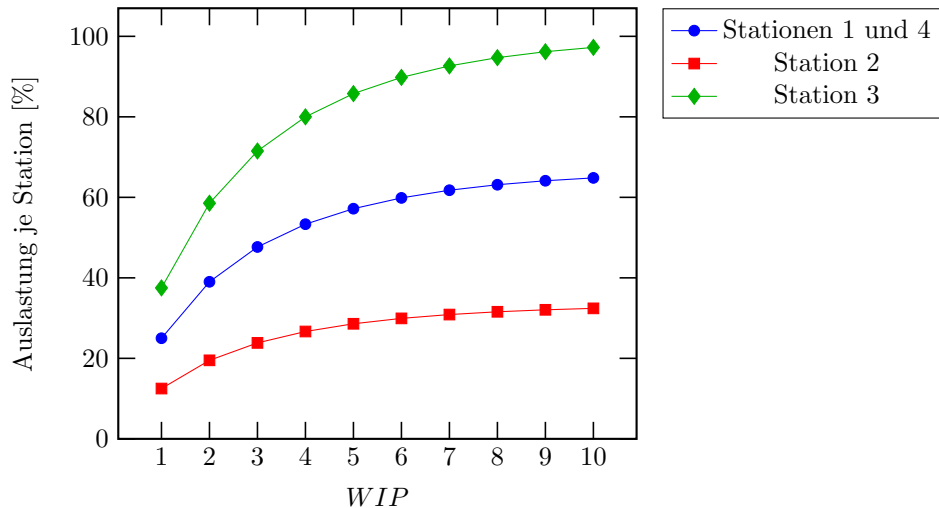
z. B.

$$\rho(i = 1, WIP = 2) = \frac{0,0195 \text{ ZE}^{-1}}{\frac{1}{20} \text{ ZE}^{-1}} = 39\%. \quad (12)$$

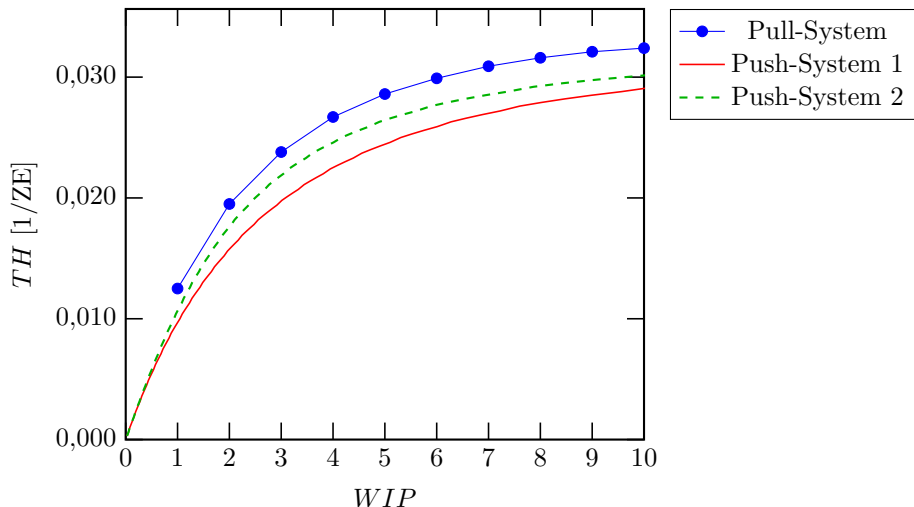
Analyse des Pull-Systems VI



Analyse des Pull-Systems VII



Vergleich Push- vs. Pull-System I



Vergleich Push- vs. Pull-System II

Gewinnfunktion

$$G = db \cdot TH - hc \cdot WIP \quad (13)$$

Deckungsbeitrag $db = 100$ GE

Bestands-Kosten $hc = 0,2$ GE/ZE

Vergleich Push- vs. Pull-System III

