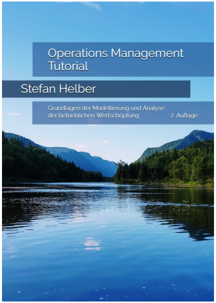
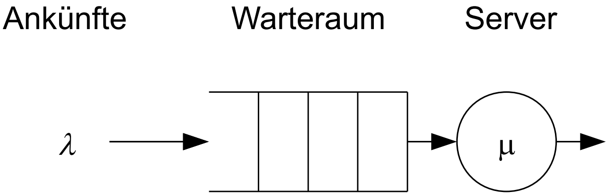
Prozessanalyse I: Zeiten und Bestände

Auslastung von Bediensystemen

Prof. Dr. Stefan Helber



Modellierung von Wertschöpfungsprozessen



Grundmodell des Warte- und Bediensystems

- Ankunftsprozess
- Warteraum
- Bedienprozess

Zeiten, Bestände, Durchsatz, Auslastung?

Auslastung von Bediensystemen

Notation

- Rate der Ankünfte (je ZE): λ
- Erwartete Zwischenankunftszeit: $\mathrm{E}[T_a] = \frac{1}{\lambda}$
- Servicerate **eines** Servers (je ZE): μ
- Erwartete Service- oder Bearbeitungszeit: $\mathrm{E}[T_s] = \frac{1}{\mu}$
- Anzahl Server N, z.B. $N = 1$
- Auslastung $\rho = \frac{\lambda}{N \cdot \mu}$

Kenntnis der Auslastung reicht nicht!

Verhalten von Warte- und Bediensystemen

Betrachtung von drei Fällen mit **identischer Auslastung**

Fall 1: Identische Zwischenankunfts- und Bedienzeiten

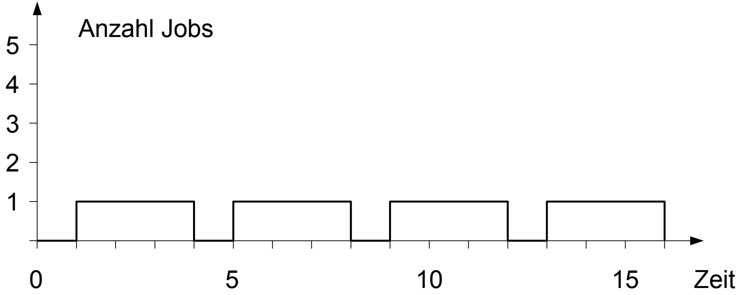
Fall 2: Verschiedene Zwischenankunftszeiten, identische Bedienzeiten

Fall 3: Verschiedene Zwischenankunfts- und Bedienzeiten

Zahlenbeispiele zum Bestandsverlauf

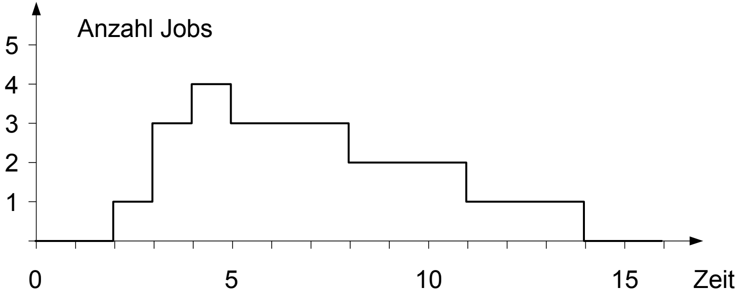
Fall 1: Identische Zwischenankunfts- und Bedienzeiten

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4
Ankunftszeitpunkte [ZE]	1	5	9	13
Zwischenankunftszeiten [ZE]	-	4	4	4
Bedienzeiten [ZE]	3	3	3	3
Wartezeiten [ZE]	0	0	0	0



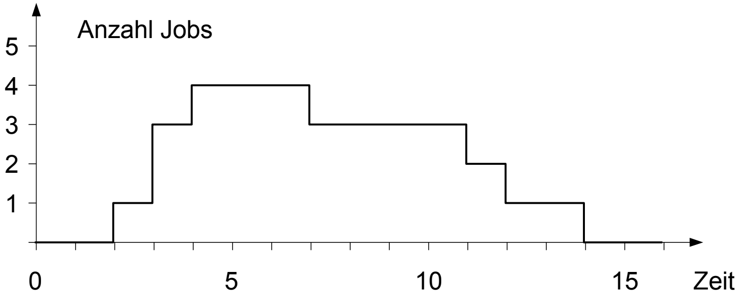
Fall 2: Verschiedene Zwischenankunftszeiten, identische Bedienzeiten

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4
Ankunftszeitpunkte [ZE]	2	3	3	4
Zwischenankunftszeiten [ZE]	-	1	0	1
Bedienzeiten [ZE]	3	3	3	3
Wartezeiten [ZE]	0	2	5	7



Fall 3: Verschiedene Zwischenankunfts- und Bedienzeiten

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4
Ankunftszeitpunkte [ZE]	2	3	3	4
Zwischenankunftszeiten [ZE]	-	1	0	1
Bedienzeiten [ZE]	5	4	1	2
Wartezeiten [ZE]	0	4	8	8



Ergebnis

Beobachtung

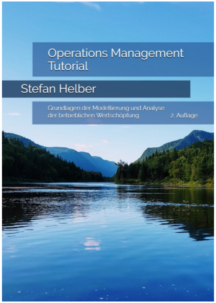
- vier Jobs von im Zeitintervall $[0, 16]$
- Summe der Bearbeitungszeiten stets 12 ZE
- Auslastung stets $\frac{12}{16} = 75\%$
- trotzdem unterschiedliche Wartezeiten und Bestände

Kenntnis der Auslastung reicht nicht, **Variabilität** ist entscheidend!

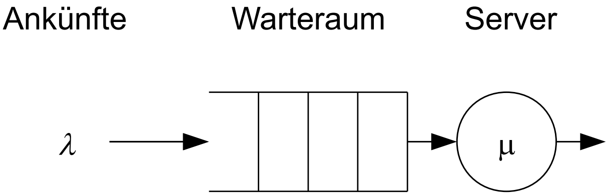
Prozessanalyse I: Zeiten und Bestände

Variabilität und Wartezeiten

Prof. Dr. Stefan Helber



Ausgangspunkt: Grundmodell



Modellierung zufälliger Zeiten, ein Server ($N = 1$)

Zufallsvariable T_s für die Servicezeit

- Erwartungswert $\mathrm{E}[T_s]$
- Standardabweichung σ_{T_s}
- Variationskoeffizient $c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]} = \sigma_{T_s} \cdot \mu$

Zufallsvariable T_a für die Zwischenankunftszeit

- Erwartungswert $\mathrm{E}[T_a]$
- Standardabweichung σ_{T_a}
- Variationskoeffizient $c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]} = \sigma_{T_a} \cdot \lambda$

Auslastung $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]}$

Simulationsstudie

Frage: Einfluss diverser Parameter auf die mittlere Wartezeit

Größe	Ausprägung(en)
$\mathrm{E}[T_s] = \frac{1}{\mu}$ [ZE]	10
$c_a = c_s$	0,25 / 0,5 / 1,0 / 2,0
$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]}$	50% / 65% / 80% / 95% / 98%

Mittlere Zwischenankunftszeit

$$\mathrm{E}[T_a] = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\rho}$$

Alle Zeiten folgen Gamma-Verteilung (stetig, nicht negativ)!

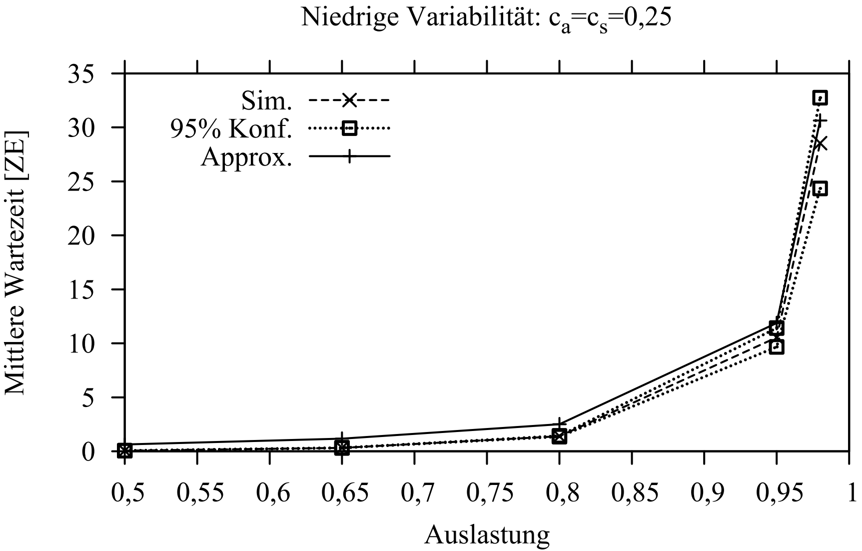
Betrachtete Größen

Simulation

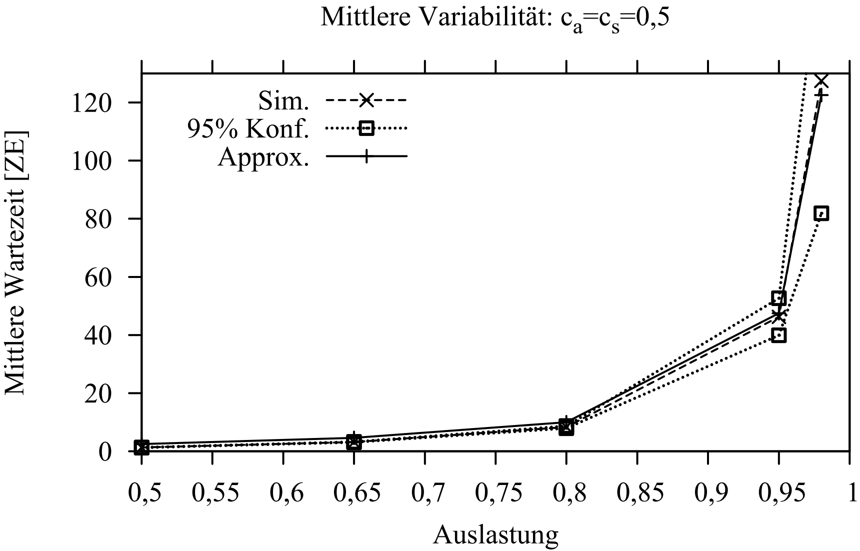
- geschätzter Mittelwert der Wartezeit
- Grenzen des Konfidenzintervalls

Daneben analytische Abschätzung (via Formel)!

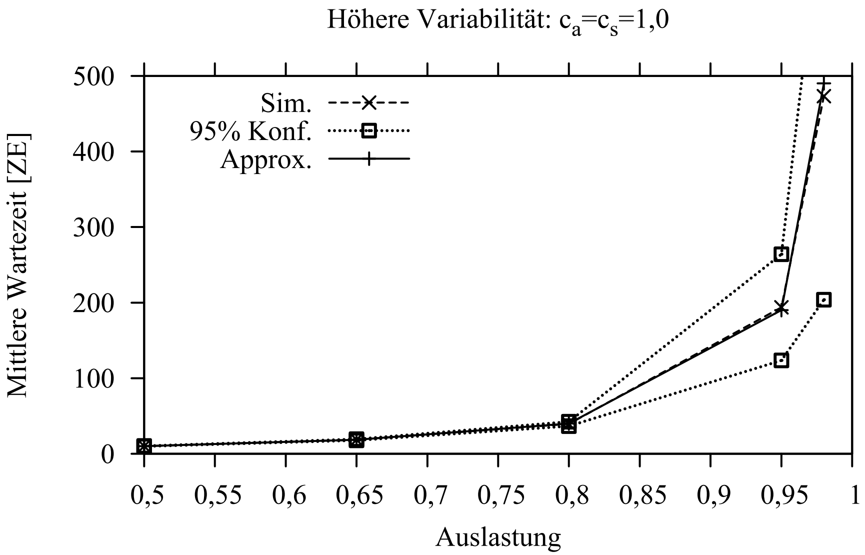
Mittlere Wartezeit bei niedriger Variabilität



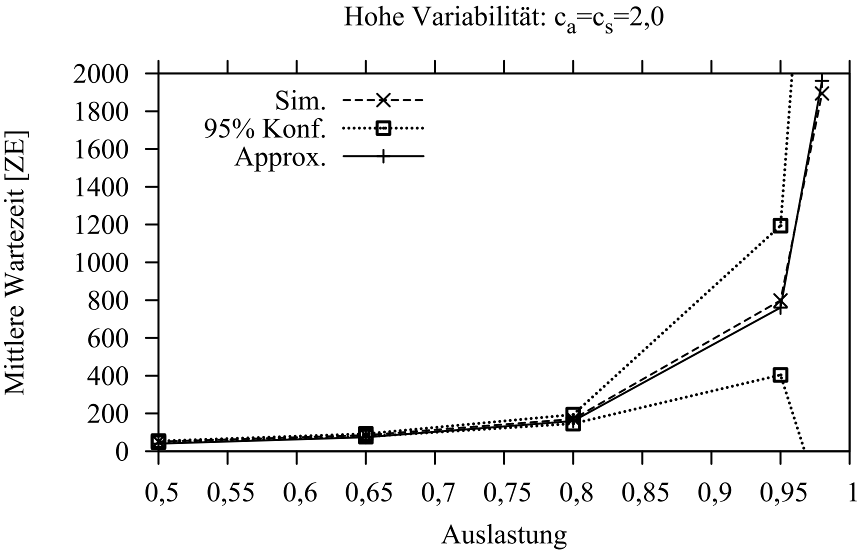
Mittlere Wartezeit bei mittlerer Variabilität



Mittlere Wartezeit bei höherer Variabilität



Mittlere Wartezeit bei hoher Variabilität



Zusammenfassung

Ergebnisse

- Wartezeit steigt mit Auslastung ρ
- Wartezeit steigt mit Variabilität c_a und c_s
- Simulation recht präzise
- Ergebnisse der Approximation nahe an Simulation

Approximationsformel von Kingman

Abschätzung der mittleren Wartezeit ($N = 1$)

$$\mathrm{E}[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

Abschätzung der mittleren Durchlaufzeit ($N = 1$)

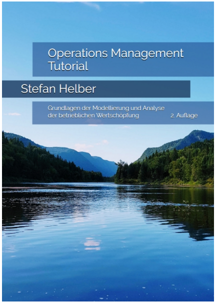
$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \frac{1}{\mu} \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}$$

Ergo: Einfache Abschätzung der mittleren Wartezeit möglich!

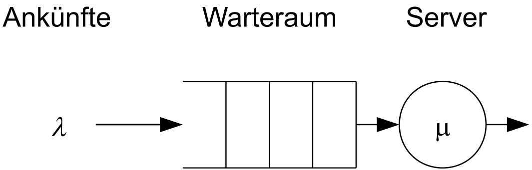
Prozessanalyse I: Zeiten und Bestände

Anwendung der Kingman-Approximation

Prof. Dr. Stefan Helber



Ausgangspunkt: Grundmodell



Parameter

- Ankünfte mit Rate $\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}[T_a]}$, Bearbeitung mit Rate $\mu = \frac{1}{\mathrm{E}[T_s]}$
- Auslastung $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]}$
- Variationskoeffizienten $c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]} = \sigma_{T_a} \cdot \lambda$ und $c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]} = \sigma_{T_s} \cdot \mu$
- ein Server

Abschätzung der mittleren Wartezeit

$$\mathrm{E}[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

Beispiel: Wartezeiten von Anrufern

Annahmen

- drei Anrufe je Stunde
- Standardabweichung der Zwischenanrufszeit 20 Minuten
- mittlere Servicezeit 15 Minuten
- Standardabweichung der Servicezeit 15 Minuten
- ein Kundendienstmitarbeiter (Server)

Analyse

1. Für die Zwischenanrufzeiten gilt:

$$E[T_a] = 20 \text{ min}$$
$$\sigma_{T_a} = 20 \text{ min}$$
$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{E[T_a]} = 1$$
$$\lambda = \frac{1}{20} \text{ min}^{-1}$$

2. Für die Bearbeitungszeiten gilt:

$$E[T_s] = 15 \text{ min}$$
$$\sigma_{T_s} = 15 \text{ min}$$
$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{E[T_s]} = 1$$
$$\mu = \frac{1}{15} \text{ min}^{-1}$$

Analyse (Fortsetzung)

1. Für die Auslastung folgt:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 75\%$$

2. Für die Wartezeit folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[W_q] &\approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{1+1}{2} \frac{0{,}75}{1-0{,}75} \cdot 15 \text{ min} \\ &= 45 \text{ min} \end{aligned}$$

3. Für die Summe aus Wartezeit und Bedienzeit folgt:

$$\mathrm{E}[W] = 45 \text{ min} + 15 \text{ min} = 60 \text{ min}$$

Verringerung der Wartezeit

Kingman'sche Approximationsformel für die Wartezeit

$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

Ansatzpunkte

- Verringerung der **Variabilität** $c_a^2 + c_s^2$
- Verringerung der **Auslastung** ρ
- Verringerung der **mittleren Servicezeit** $E[T_s] = \frac{1}{\mu}$

Im Beispiel:
Schulung des Kundendienstmitarbeiters, Reduktion der mittleren Bedienzeit von 15 auf 10 Minuten und der Standardabweichung von 15 auf fünf Minuten

Analyse

1. An den Zwischenanrufzeiten kann nichts geändert werden, für sie gilt weiterhin:

$$E[T_a] = 20 \text{ min}$$
$$\sigma_{T_a} = 20 \text{ min}$$
$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{E[T_a]} = 1$$
$$\lambda = \frac{1}{20} \text{ min}^{-1}$$

2. Für die Bearbeitungszeiten würde gelten:

$$E[T_s] = 10 \text{ min}$$
$$\sigma_{T_s} = 5 \text{ min}$$
$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{E[T_s]} = 0{,}5$$
$$\mu = \frac{1}{10} \text{ min}^{-1}$$

Analyse (Fortsetzung)

1. Für die Auslastung würde folgen:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{20} = 50\%$$

2. Für die Wartezeit ergäbe sich:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[W_q] &\approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{1 + 0{,}5^2}{2} \frac{0{,}5}{1 - 0{,}5} \cdot 10 \text{ min} \\ &= 6{,}25 \text{ min} \end{aligned}$$

3. Für die Summe aus Wartezeit und Bedienzeit würde folgen:

$$\mathrm{E}[W] = 6{,}25 \text{ min} + 10 \text{ min} = 16{,}25 \text{ min}$$

Ergebnisse

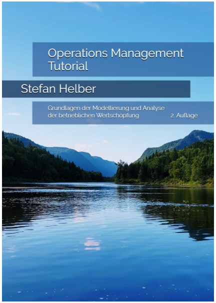
Beobachtungen

- einfache Anwendung der Approximation von Kingman
- transparente Darstellung elementarer Zusammenhänge
- mehrere Ansatzpunkte zur Verringerung von Wartezeiten

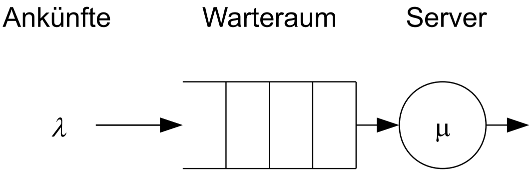
Prozessanalyse I: Zeiten und Bestände

Das Gesetz von Little

Prof. Dr. Stefan Helber



Ausgangspunkt: Grundmodell



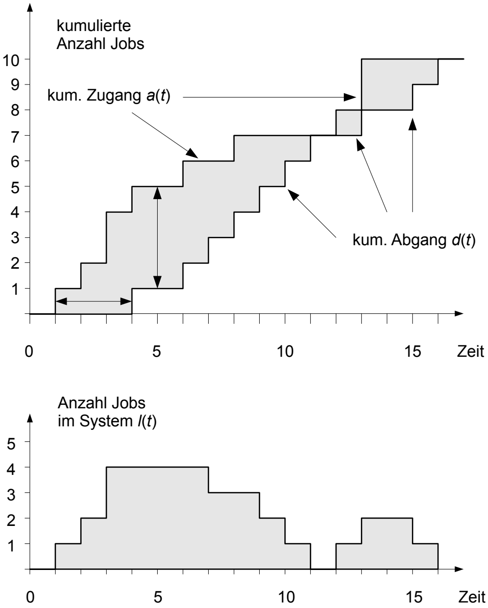
Annahme: Eingeschwungener Zustand

- Parameter zeitlich konstant
- Ankunftsrate kleiner als Bedienrate
- langfristig stationäre Zustandswahrscheinlichkeiten

Gesetz von Little:

$$\boxed{\text{Mittlerer Bestand} = \text{Ankunftsrate} \cdot \text{Mittlere Warte- bzw. Durchlaufzeit}}$$

Beispielhafter Bestandsverlauf



Analyse

Betrachtung eines Verlaufspfades

1. kumulierte Ankünfte $a(t)$, Abgänge $d(t)$
2. Bestand $I(t) = a(t) - d(t)$
3. zwei Zeitpunkte t mit $I(t = 0) = I(t = T) = 0$
4. Jobs $j = 1,...,J$
5. Ankunftszeitpunkt t_j^a
6. Abgangszeitpunkt t_j^d

Zeitdauer, die Job j im System verbringt

$$w_j = t_j^d - t_j^a \tag{1}$$

Mittlere Zeit der Jobs im System (über alle Jobs) $\overline{w}$

$$\overline{w} = \frac{\sum_{j=1}^{J} w_j}{J} \tag{2}$$

Gesamtzeit *aller* Jobs im System x (Hilfsgröße)

$$x = \sum_{j=1}^{J} w_j \tag{3}$$

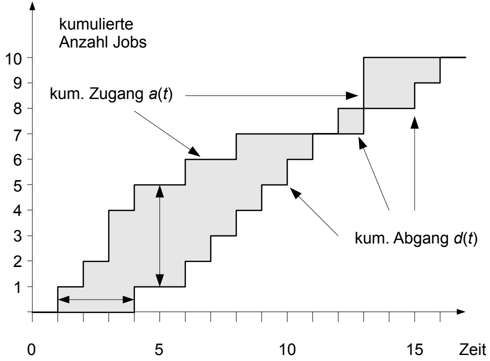
Mittlere Zeit der Jobs im System

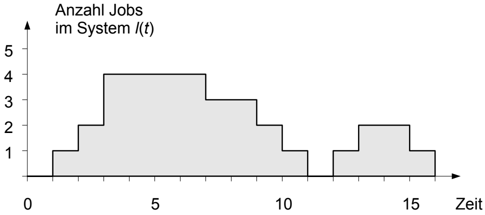
$$\overline{w} = \frac{x}{J} \tag{4}$$

daraus

$$x = \overline{w} \cdot J \tag{5}$$

Beispielhafter Bestandsverlauf





Ermittlung von x durch Integration über die Zeit

$$x = \int_{t=0}^{T} l(t)dt = \int_{t=0}^{T} (a(t) - d(t))dt \tag{6}$$

Zeitlicher Mittelwert $\bar{l}$ des Bestands

$$\bar{l} = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} l(t)dt = \frac{x}{T} \tag{7}$$

Einsetzen von (5) in Gleichung (7)

$$\bar{l} = \overline{w} \cdot \frac{J}{T} \tag{8}$$

Ankunftsrate

$$\lambda = \frac{J}{T}. \tag{9}$$

Also aus (8) mit (9)

$$\bar{l} = \lambda \overline{w} \tag{10}$$

Gesetz von Little gilt für die Realisation!

Nun Betrachtung von Erwartungswerten

Notation

- leeres System zu Zeitpunkten 0 und T
- Zufallsvariablen W und L für Zeiten und Bestände
- Erwartungswerte $\mathrm{E}[W]$ und $\mathrm{E}[L]$
- Zufallsvariable X für Zeit aller Jobs

$$\mathrm{E}[X] = \lambda \cdot \mathrm{E}[T] \cdot \mathrm{E}[W], \tag{11}$$

$$\mathrm{E}[L] = \frac{\mathrm{E}[X]}{\mathrm{E}[T]}. \tag{12}$$

$$\mathrm{E}[L] = \frac{\lambda \cdot \mathrm{E}[T] \cdot \mathrm{E}[W]}{\mathrm{E}[T]} = \lambda \cdot \mathrm{E}[W] \qquad \blacksquare \tag{13}$$

Beispiel zur Anwendung des Gesetzes von Little

Problemstellung

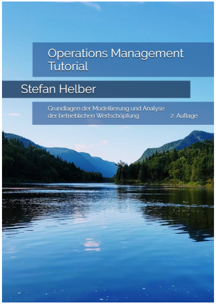
- im Mittel rufen drei Kunden je Stunde an
- mittlere Warte- und Bedienzeit je Kunde 16,25 Minuten
- mittlere Zahl belegter Telefonleitungen??

$$\mathrm{E}[L] = \lambda \cdot \mathrm{E}[W] = \frac{1}{20}\,\mathrm{min}^{-1} \cdot 16{,}25\,\mathrm{min} = 0{,}8125$$

Prozessanalyse I: Zeiten und Bestände

Mehrstufige Produktionssysteme: Beurteilung von Beständen, Durchlaufzeiten und Durchsatz

Prof. Dr. Stefan Helber



Beispiel: Gegebene Leistungsdaten von Systemen

Vier Linien mit je vier Prozessschritten/Maschinen:

$$\longrightarrow \boxed{M_1} \longrightarrow \boxed{M_2} \longrightarrow \boxed{M_3} \longrightarrow \boxed{M_4} \longrightarrow$$

Prozessschritt/Maschine	1	2	3	4
(Mittlere) Dauer [ZE]	20	10	30	20

Linie	1	2	3	4
mittlerer Bestand	2	5	8	3
mittlerer Durchsatz [1/ZE]	0,02381	0,02564	0,03333	0,01429
mittlere Durchlaufzeit [ZE]	84	195	240	210

Welche Linie arbeitet gut, welche nicht?

Logistische Leistungsanalyse

Kenngrößen (Mittelwerte)

- Durchsatz (Throughput, *TH*)
- Durchlaufzeit (Cycle Time, *CT*)
- Bestand (Work in Process, *WIP*)

“Factory Physics” (Hopp & Spearman, 2011)

- Durchsatz und Durchlaufzeit als Funktionen des Bestandes
- Betrachtung von mittleren Werten
- drei Fälle
  - best-möglicher Fall (*best case*)
  - schlechtest-möglicher Fall (*worst case*)
  - praktisch schlechtest-möglicher Fall (*practical worst case*)
- grobe Einordnung und Beurteilung realer Systeme

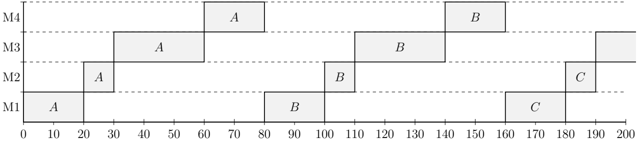
Best-möglicher Fall

Zentrale Annahme:

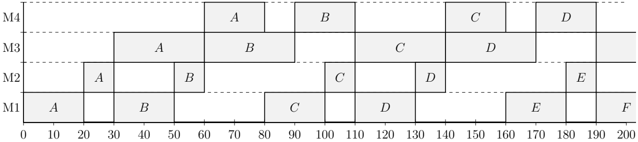
Alle Prozesszeiten je Maschine deterministisch, keine Variabilität

Best-möglicher Fall

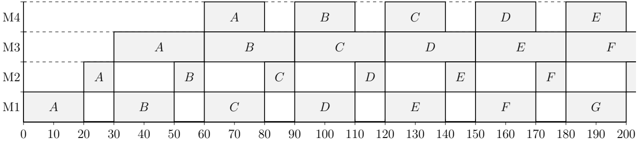
$WIP = 1$:



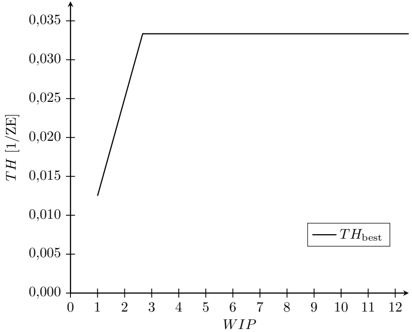
$WIP = 2$:



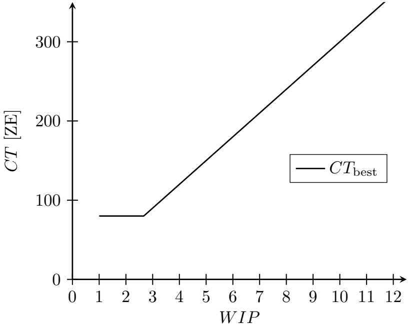
$WIP = 2^2/3$:



Best-möglicher Fall



(a) Durchsatz in Abhängigkeit des WIP



(b) DLZ in Abhängigkeit des WIP

Abbildung: Best-möglicher Fall

Parameter WIP_0, T_0 und r_b

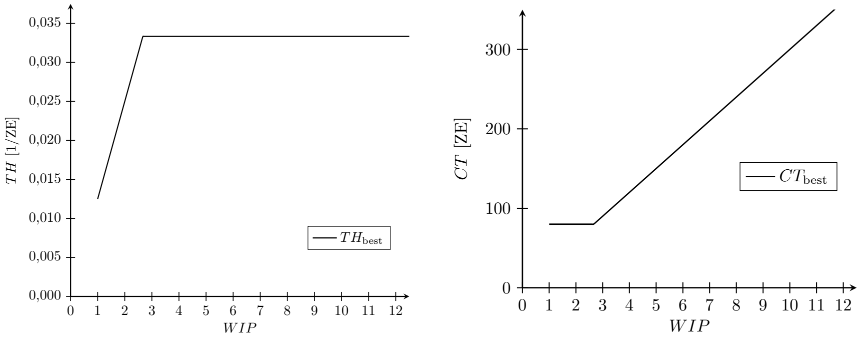
Kenngrößen

- Gesamtbearbeitungszeit $T_0 = \sum_{i=1}^{I} E[T_s(i)] = \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{\mu_i}$
- Engpassrate $r_b = \min(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_i)$
- kritischer Bestand $WIP_0 = r_b \cdot T_0$

Beispiel:

- $T_0 = (20 + 10 + 30 + 20)$ ZE $= 80$ ZE
- $r_b = 1/30$ ZE^{-1}
- $WIP_0 = r_b \cdot T_0 = \frac{1}{30 \text{ ZE}} \cdot 80 \text{ ZE} = 2\frac{2}{3}$

Best-möglicher Fall



(a) Durchsatz in Abhängigkeit des WIP

(b) DLZ in Abhängigkeit des WIP

Abbildung: Best-möglicher Fall

Best-möglicher Fall

Kurvenverlauf

$$TH_{\text{best}}(WIP) = \begin{cases} \frac{WIP}{T_0}, & \text{wenn } WIP \leq WIP_0 \\ r_b, & \text{wenn } WIP > WIP_0 \end{cases} \tag{1}$$

Gesetz von Little

$$WIP = TH(WIP) \cdot CT(WIP), \tag{2}$$

auflösen

$$CT(WIP) = \frac{WIP}{TH(WIP)} \tag{3}$$

$$CT_{\text{best}}(WIP) = \begin{cases} T_0, & \text{wenn } WIP \leq WIP_0 \\ \frac{WIP}{r_b}, & \text{wenn } WIP > WIP_0 \end{cases} \tag{4}$$

Schlechtest-möglicher Fall

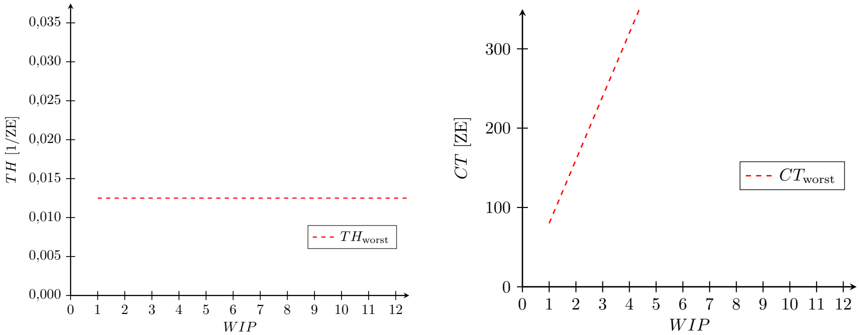
Zentrale Annahme:

Alle Werkstücke bewegen sich gemeinsam durch das System

- nur ein Werkstück in Bearbeitung
- nur eine Maschine aktiv

Extrem pessimistisches Systemmodell!

Schlechtest-möglicher Fall



(a) Durchsatz in Abhängigkeit des WIP

(b) DLZ in Abhängigkeit des WIP

Abbildung: Schlechtest-möglicher Fall

Schlechtest-möglicher Fall

Kurvenverlauf

$$CT_{\text{worst}}(WIP) = WIP \cdot T_0 \tag{5}$$

Gesetz von Little

$$WIP = TH(WIP) \cdot CT(WIP) \tag{6}$$

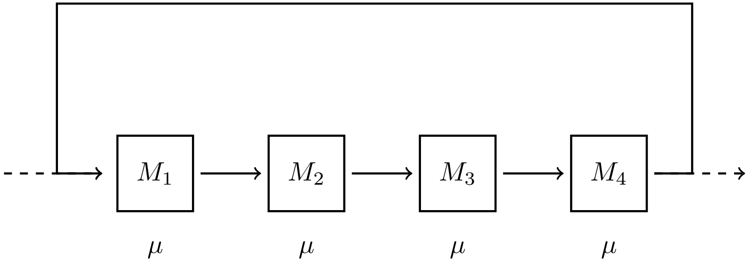
auflösen

$$TH_{\text{worst}}(WIP) = \frac{WIP}{CT_{\text{worst}}(WIP)} = \frac{1}{T_0} \tag{7}$$

Praktisch schlechtest-möglicher Fall

Modellvorstellung nach Hopp/Spearman (2011)

- *WIP* Werkstücke im System (CONWIP-Produktionssteuerung)

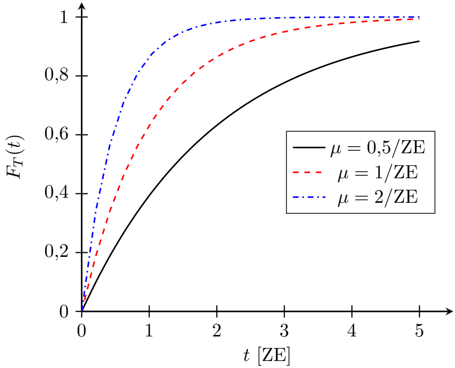


- Bedienrate μ identisch, *jede* Station ist Engpass mit $r_b = \mu$
- Bearbeitungszeiten folgen *Exponentialverteilung* mit Parameter μ

Exponentialverteilung

Verteilungsfunktion von Zeitdauern T

$$\text{Prob}[T \leq t] = F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{8}$$



Exponentialverteilung

Spezielle Eigenschaften der Exponentialverteilung mit Rate μ

- $T \geq 0$
- Gedächtnislosigkeit, erwartete restliche Zeit ist stets $\frac{1}{\mu}$
- analytisch leicht handhabbar
- sehr pessimistisches Modell für Serviceprozesse
- sehr gutes Modell für zufällige Ankunftsprozesse

Praktisch schlechtest-möglicher Fall

Analyse des praktisch-schlechtestmöglichen Falls

- im System mit I Maschinen sind stets WIP Werkstücke
- alle Maschinen arbeiten gleich schnell, mittlere Bearbeitungszeit stets $^1/_{r_b}$
- Gesamt*bearbeitungs*dauer für *ein* Werkstück an *allen* I Maschinen

$$T_0 = I \cdot \frac{1}{r_b} \tag{9}$$

- ankommendes Werkstück sieht Gesamtsystem mit $WIP - 1$ *anderen* Werkstücken, je Maschine im Mittel $\frac{WIP-1}{I}$ Werkstücke
- erwartete Durchlaufzeit CT_i dieses an Maschine i ist (Rest-)Bearbeitungszeit der $\frac{WIP-1}{I}$ anderen Werkstücke plus eigene Bearbeitungszeit
- *restliche* Bearbeitungszeit stets $\frac{1}{r_b}$

Praktisch schlechtest-möglicher Fall

- Durchlaufzeit des an Maschine i eintreffenden Werkstücks

$$CT_i(WIP) = \frac{WIP - 1}{I} \cdot \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_b} \tag{10}$$

Durchlaufzeit über alle I Maschinen

$$CT_{\mathrm{pwc}}(WIP) = I \cdot CT_i(WIP) = \frac{WIP - 1}{r_b} + \frac{I}{r_b} = \frac{WIP - 1}{r_b} + T_0 = \frac{WIP - 1 + T_0 \cdot r_b}{r_b}. \tag{11}$$

Gesetz von Little und $WIP_0 = r_b \cdot T_0$ führen auf Durchsatz

$$TH_{\mathrm{pwc}}(WIP) = \frac{WIP}{CT_{\mathrm{pwc}}(WIP)} = \frac{WIP}{WIP - 1 + T_0 \cdot r_b} \cdot r_b = \frac{WIP}{WIP - 1 + WIP_0} \cdot r_b \tag{12}$$

Praktisch schlechtest-möglicher Fall

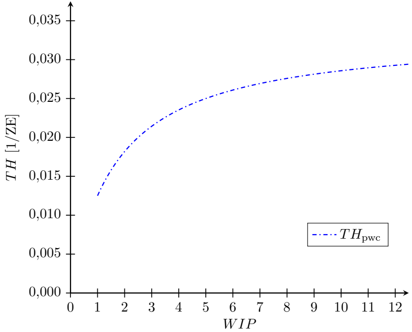
- Durchlaufzeit über alle I Maschinen

$$CT_{\text{pwc}}(WIP) = \frac{WIP - 1 + T_0 \cdot r_b}{r_b} \tag{13}$$

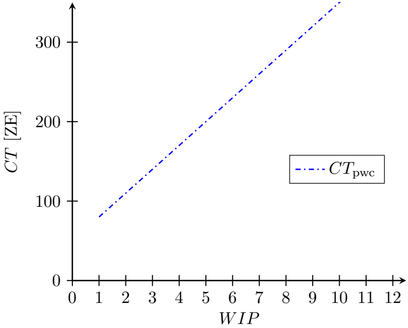
- Durchsatz

$$TH_{\text{pwc}}(WIP) = \frac{WIP}{WIP - 1 + WIP_0} \cdot r_b \tag{14}$$

Praktisch schlechtest-möglicher Fall



(a) Durchsatz in Abhängigkeit des WIP



(b) Durchlaufzeit in Abhängigkeit des WIP

Abbildung: Praktisch schlechtest-möglicher Fall

Anwendung auf das Beispiel

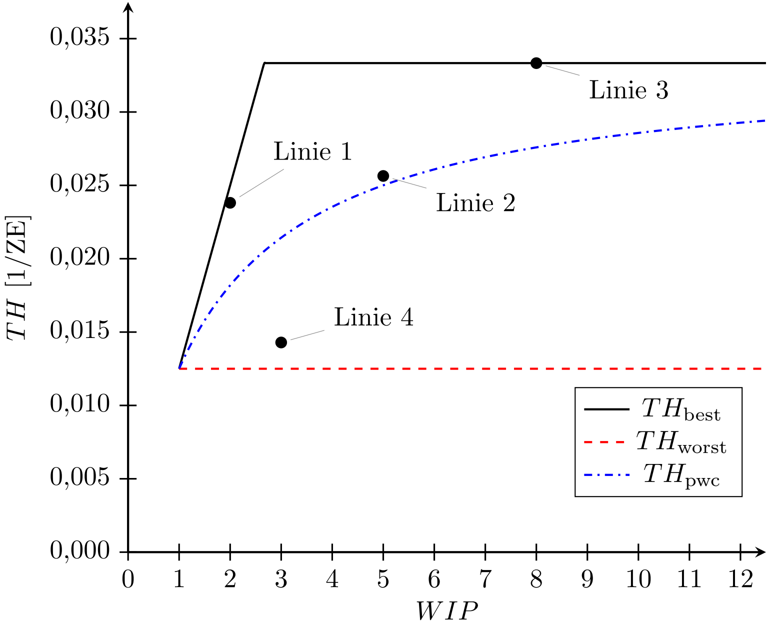
Daten der existierenden Systeme

Linie	1	2	3	4
mittlerer Bestand	2	5	8	3
mittlerer Durchsatz [1/ZE]	0,02381	0,02564	0,03333	0,01429
mittlere Durchlaufzeit [ZE]	84	195	240	210

daraus relevante Parameter

- $T_0 = (20 + 10 + 30 + 20)$ ZE
- $r_b = {}^1\!/_{30}\ \text{ZE}^{-1}$
- $WIP_0 = r_b \cdot T_0 = \frac{1}{30\ \text{ZE}} \cdot 80\ \text{ZE} = 2\frac{2}{3}$

Anwendung auf das Beispiel



Anwendung auf das Beispiel

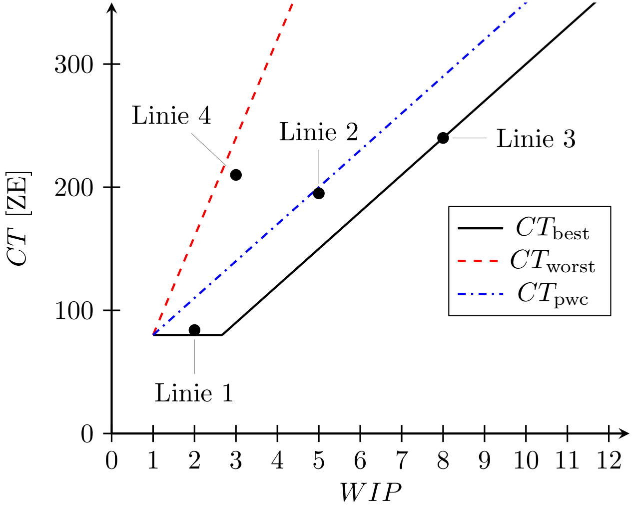


Abbildung: Analyse der Durchlaufzeit in Abhängigkeit des Bestandes